1er th de Sylow [Per] p 18

Th : Si G est un gpe d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ et p un diviseur 1er de n, G contient un p-sylow.

Dém :

A voir : 1) Soit M un gpe et N un ssgpe de M.
Si M contient un p-sylow S, il existe $a \in M$ tq $aSa^{-1} \cap N$ soit un p-sylow de N.

2) G s'injecte ds $GL_n(\mathbb{F}_p)$

3) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & & x \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{F}_p) \right\}$ est un p-sylow de $GL_n(\mathbb{F}_p)$

Ccl : G s'identifie à un ssgpe de $GL_n(\mathbb{F}_q)$ donc contient un p-sylow.

---

1) On mq que $aSa^{-1} \cap N$ est un p-ssgpe de N pour tt $a \in M$ ($aSa^{-1} \cap N$ est un ssgpe de aSa^{-1} qui est un p-sylow) donc il suffit de trouver $a \in M$ tq $\left| N / aSa^{-1} \cap N \right|$ ne soit pas div par p.

Par l'abs, on supp que $\left| N / aSa^{-1} \cap N \right|$ soit div par p pour tt $a \in M$ et on fait opérer N sur M/S par transl à gche.

Alors, $|ab(aS)| = \left| N / aSa^{-1} \cap N \right|$ est div par p pour tt $a \in M$

donc $\left| M/S \right| = \sum_{a \in R} |ab(aS)|$ est div par p ↯ (S est un p-sylow de M)

2) G s'injecte ds $\mathfrak{S}_n$ (Cayley) qui s'injecte ds $GL_n(\mathbb{F}_p)$ ($\sigma \mapsto u_\sigma$)

3) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & & x \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{F}_p) \right\}$ est un ssgpe de $GL_n(\mathbb{F}_p)$ d'ordre

$p p^2 \cdots p^{n-1} = p^{n(n-1)/2}$ mais

$$|GL_n(\mathbb{F}_p)| = (p^n-1)(p^n-p)\cdots(p^n-p^{n-1})$$
$$= p^{n(n-1)/2}(p^n-1)(p^{n-1}-1)\cdots(p-1)$$
$$= p^{n(n-1)/2}\, m \quad \text{avec} \quad p \nmid m$$

__Cor__ : Si G est un gpe d'ordre $p^\alpha m$ avec p 1er ne divisant pas $m \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha \in \mathbb{N}^*$, G contient un ss gpe d'ordre p^i pour tt $i \in \{0, \dots, \alpha\}$.

__Dém__ :
D'après le th, G contient un ssgpe H d'ordre p^α donc il suffit de mq H contient un ssgpe d'ordre p^i pour tt $i \in \{0, \dots, \alpha - 1\}$.
On fait une réc sur $\alpha \in \mathbb{N}^*$:

__$\alpha = 1$__ : $\{e\}$ convient

__$\alpha > 1$__ : $Z(H) \neq \{e\}$ (à justifier) donc il existe $x \in Z(H)$ d'ordre p^β avec $\beta \in \mathbb{N}^*$.
Par suite, $y = x^{p^{\beta-1}}$ est un élt de $Z(H)$ d'ordre p donc $H/\langle y \rangle$ est un gpe d'ordre $p^{\alpha-1}$ et donc il contient un ssgpe K_i d'ordre p^i pour tt $i \in \{0, \dots, \alpha-2\}$ (hyp de réc) d'où le résultat avec $\{e\}$ et les $\pi^{-1}(K_i)$ où $\pi : H \to H/\langle y \rangle$ est la proj can.

__$Z(H) \neq \{e\}$__ : L'op de H sur lui-m̂ par conj fournit :
$$|H| = |Z(H)| + \sum_{h \in R \setminus Z(H)} |\mathrm{Orb}(h)|$$ mais p divise $|H|$ et $|\mathrm{Orb}(h)|$ pour tt $h \in R \setminus Z(H)$ donc p divise $|Z(H)|$ et donc $|Z(H)| \geq p$ $(e \in Z(H))$.