Simplicité de $\mathcal{A}_n$ [Per] p 28.30.

Th : $\mathcal{A}_5$ est simple.

Dém :

Soit $H \triangleleft \mathcal{A}_5$, $H \neq \{id\}$.

On rq que $\mathcal{A}_5$ a 60 élts : id
15 d'ordre 2 (prod de transp disj)
20 d'ordre 3 (3-cycles)
24 d'ordre 5 (5-cycles)

A voir : Si H contient un élt d'ordre 2 (resp 3 ou 5), il les contient ts.

Ccl : H ne peut contenir qu'un seul type d'élts en plus de id
($1+15=16$, $1+20=21$ et $1+24=25$ ne divisent pas 60)
donc $|H| \geq 1+15+20=36$ et donc $|H|=60$ d'où $H=\mathcal{A}_5$

• Pour les élts d'ordre 2 (resp 3), on montre qu'ils st conj ds $\mathcal{A}_5$.

$\mathcal{A}_5$ est 3-transitif :

Si $a_1,\dots,a_5$ (resp $b_1,\dots,b_5$) st des élts $\neq$ de $\{1,\dots,5\}$, il existe $\sigma\in\mathfrak{S}_5$ tq $\sigma(a_i)=b_i$ pour $i\in\{1,2,3\}$ donc, si $\sigma\in\mathcal{A}_5$, c'est fini, sinon, on compose σ par (a_4,a_5).

Les élts d'ordre 2 st conj ds $\mathcal{A}_5$:

Si $\tau=(a_1,a_2)(a_4,a_5)$ et $\tau'=(b_1,b_2)(b_4,b_5)$, il existe $\sigma\in\mathcal{A}_5$ tq $\sigma(a_i)=b_i$ pour $i\in\{1,2,3\}$ donc $\tau'=\sigma\tau\sigma^{-1}$.

Les élts d'ordre 3 st conj ds $\mathcal{A}_5$:

Si $\tau=(a_1,a_2,a_3)$ et $\tau'=(b_1,b_2,b_3)$, il existe $\sigma\in\mathcal{A}_5$ tq $\sigma(a_i)=b_i$ pour $i\in\{1,2,3\}$ donc $\tau'=\sigma\tau\sigma^{-1}$.

• Pour les élts d'ordre 5, on rq que si H en contient un, il contient le 5-sylow engendré par cet élt donc ts les

5-sylow (ils st conj ds $\mathcal{A}_5$) et donc ts les él^{ts} d'ordre 5 (un tel él^t engendre un 5-sylow).

Cor : $\mathcal{A}_n$ est simple pour $n \geq 5$.

Dém :

Soit $H \triangleleft \mathcal{A}_n$, $H \neq \{id\}$

Avoir : H contient un 3-cycle

Ccl : H contient ts les 3-cycles (ils st conj ds $\mathcal{A}_n$ puisque $\mathcal{A}_n$ est 3-transitif et m̂ $(n-2)$-transitif) donc $\mathcal{A}_n$ (il est engendré par les 3-cycles) et donc $H = \mathcal{A}_n$

On note $E = \{1, \dots, n\}$

On prend $\sigma \in H \setminus \{id\}$.

Il existe une partie F de E à 5 él^{ts} et $\rho \in H \cap \mathcal{A}(F) \setminus \{id\}$:

On prend $a \in E$ tq $\sigma(a) = b \neq a$

$c \in E$ tq $c \notin \{a, b, \sigma(b)\}$

On considère $\tau = (a, c, b)$

$\rho = \tau(\sigma\tau^{-1}\sigma^{-1}) = (a, c, b)(\sigma(a), \sigma(b), \sigma(c))$

$F = \{a, b, c, \sigma(a), \sigma(b), \sigma(c)\}$

Alors, F a au + 5 él^{ts} ($\sigma(a) = b$) et quitte à en ajouter, OPS qu'il en a 5.

De plus, $\rho = (\tau\sigma\tau^{-1})\sigma^{-1} \in H$

$\rho \in \mathcal{A}(F)$ $\left(\rho(F) = F \text{ et } \rho_{|E \setminus F} = id_{E \setminus F}\right)$

$\rho \neq id$ $\left(\rho(b) = \tau\sigma(b) \neq b \text{ car } \sigma(b) \neq \tau^{-1}(b) = c\right)$

$H \cap \mathcal{A}(F)$ contient un 3-cycle :

$H \cap \mathcal{A}(F)$ est un ssgpe dist ds $\mathcal{A}(F)$ et non trivial (il contient ρ) donc $H \cap \mathcal{A}(F) = \mathcal{A}(F)$ ($\mathcal{A}(F) \simeq \mathcal{A}_5$ est simple) et donc $H \cap \mathcal{A}(F)$ contient un 3-cycle.