Ssgpes finis de $O^+(3)$

Prop : Un ssgpe fini de $O^+(3)$ est un $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, D_{2n}, A_4, $\mathfrak{S}_4$ ou A_5

Dém :

- Soit G un ssgpe fini de $O^+(3)$ d'ordre $n \geq 2$
- On rq qu'une rot $g \neq id$ fixe exact^t 2 pts $x, -x$ de $\mathbb{S}^2$ appelés pôles de g.
- On considère l'op nat de G sur $P = \{$pôles de g, $g \in G \setminus \{id\}\}$ (si $g \in G, x \in P$, $g(x) \in P$ car $g(x) \in \mathbb{S}^2$ et $gg'g^{-1}(g(x)) = g(x)$ avec $g' \in G \setminus \{id\}$ tq $g'(x) = x$)
- On note $\Omega_1, \dots, \Omega_k$ les orb de sorte que $|\Omega_1| \geq \dots \geq |\Omega_k|$.
  G_x le stab de x
- On rq que G_x est cyclique (il s'identifie à un ssgpe fini de $O^+(2)$) d'ordre $n^x \in \{2, \dots, n\}$ (G_x est un ssgpe de G contenant $\{id, g\}$ avec $g \in G \setminus \{id\}$ tq $g(x) = x$) et que n^x est cst sur Ω_i (2 él^{ts} de la m̂ orb ont des stab conj) égal à n_i.
- On établit $n \sum_{i=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{n_i}\right) = 2(n-1)$ en comptant de 2 manières Card$\left(\{(g,x) \in G \setminus \{id\} \times P, \ g(x) = x\}\right)$
- lemme (admis) : Les seules possibilités pour k, n_i, n st :
  - (a) $k = 2$, $n_1 = n_2 = n$
  - (b) $k = 3$, $n_1 = 2$, $n_2 = 2$, $2n_3 = n$
  - (c) ______ $n_2 = 3$, $n_3 = 3$, $n = 12$
  - (d) ______, $n_3 = 4$, $n = 24$
  - (e) ______, $n_3 = 5$, $n = 60$

* ds (a), $G \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (G est le stab d'un $x \in \Omega_1$)

* ds (b) $G \simeq D_{2n}$:

1er cas : $n \neq 4$

- $\Omega_3 = \{\pm x\}$ ($G_x = G_{-x}$ donc $|\Omega_x| = |\Omega_{-x}|$)
- G stabilise $\langle x \rangle$ (si $g \in G$, $g(x) = x$ ou $-x$) donc $\langle x \rangle^\perp$ ($g \in O(3)$)
- $\phi : G \to O(2)$, $g \mapsto g_{|\langle x \rangle^\perp}$ est un morph inj (si $g_{|\langle x \rangle^\perp} = id$, $g = \left(\begin{array}{c|c} & 0 \\ \hline 0 & I_2 \end{array}\right)$ et de det 1)
- G est iso à un ssgpe de $O(2)$ non contenu ds $O^+(2)$ ($\exists g \in G \setminus G_x$ donc $g = \left(\begin{array}{c|c} -1 & 0 \\ \hline 0 & \phi(g) \end{array}\right)$ et ds $O^+(3)$ d'où $\phi(g) \in O^-(2)$)

2ème cas : $n = 4$

- G a 3 ssgpes d'ordre 2 : $G_{\pm x_1}, G_{\pm x_2}, G_{\pm x_3}$ tq $G_{\pm x_i} \cap G_{\pm x_j} = \{id\}$ si $i \neq j$
- $\forall$ elt de $G \setminus \{id\}$ est d'ordre 2
- $G \simeq D_{2,2} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

* ds (c), $G \simeq \mathcal{A}_4$:

- $\Omega_3 = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$
- $\phi : G \to \mathfrak{S}(\Omega_3)$, $g \mapsto (x_i \mapsto g(x_i))$ est un morph inj (si $g(x_i) = x_i$ pour $\forall i \in \{1, \dots, 4\}$, g fixe plus que 2 pts de $\mathbb{S}^2$)
- G est iso à un ssgpe de $\mathfrak{S}_4$ d'ordre 12

* ds (d), $G \simeq \mathfrak{S}_4$:

- $\Omega_2 = \{\pm x_1, \pm x_2, \pm x_3, \pm x_4\}$
- les x_i ne st pas coplanaires (sinon, $P = \langle x_1, x_2, x_3, x_4 \rangle$ est un plan mais G stabilise P donc $P^\perp$ et donc si $g \in G_{x_1} \setminus \{id\}$, $g = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & & 0 \\ 0 & & \\ \hline & 0 & \pm 1 \end{array}\right)$
mais g est d'ordre 3 donc $g = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & & 0 \\ 0 & & \\ \hline & 0 & 1 \end{array}\right)$ et ds $O^+(3)$ d'où $g = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \\ \hline & 0 & 1 \end{array}\right)$ $\lightning$)
- $\phi : G \to \mathfrak{S}_{\{\langle x_1 \rangle, \langle x_2 \rangle, \langle x_3 \rangle, \langle x_4 \rangle\}}$, $g \mapsto (\langle x_i \rangle \mapsto g(\langle x_i \rangle))$ est un morph inj

(si $g(\langle x_i \rangle) = \langle x_i \rangle$ pour $\forall i \in \{1, \dots, 4\}$, $\exists i_0$ tq $g_{|\langle x_{i_0} \rangle} = id_{\langle x_{i_0} \rangle}$

car sinon $g = -id$ (les x_i n'étant pas coplanaires, quitte à ren, OPS que (x_1, x_2, x_3) est une base de $\mathbb{R}^3$ ds laquelle

$g = \begin{pmatrix} \boxed{-1} & & 0 \\ & \boxed{-1} & \\ 0 & & \boxed{-1} \end{pmatrix}$) $\lightning$. Par suite, $g \in G_{x_{i_0}}$ donc $\underline{g = id}$

car sinon g est d'ordre 3 donc $g_{|\langle x_i \rangle} = id_{\langle x_i \rangle}$ pour $\forall i$

et donc $g = id$ $\lightning$.

* $\underline{\text{ds (e)}, G \simeq \mathcal{A}_5}$ (admis)