Générateurs de $GL_n(k)$ et $SL_n(k)$ [T] p 287

Th : $SL_n(k)$ est engendré par les transv et $GL_n(k)$ par les transv et les dil.

Dém :

Les transv st ds $SL_n(k) \subset GL_n(k)$ et les dil ds $GL_n(k)$.

A voir : Si $A \in GL_n(k)$, il existe un prod S de transv tq

$$SA = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & \det A \end{pmatrix}.$$

Ccl : Si $A \in SL_n(k)$, $A = S^{-1}$ est un prod de transv ($B_{ij}(\lambda)^{-1} = B_{ij}(-\lambda)$).

Si $A \in GL_n(k)$, $A = S^{-1} D_n\left(\frac{1}{\det A}\right)$ est un prod de transv et dil.

Admettons un moment le

Lemme : Si $M \in M_n(k)$ a sa 1ère colonne $\neq 0$, il existe un prod T de transv tq $TM = \begin{pmatrix} 1 & \times \cdots \times \\ 0 & \\ \vdots & M_1 \\ 0 & \end{pmatrix}$

avec $\begin{cases} M_1 \in M_{n-1}(k) \\ rg(M) = 1 + rg(M_1) \end{cases}$.

Alors, vu que $rg(A) = n$, $C_1 \neq 0$ donc il existe un prod T_1 de transv tq $T_1 A = \begin{pmatrix} 1 & \times \cdots \times \\ 0 & \\ \vdots & A_1 \\ 0 & \end{pmatrix}$ avec $\begin{cases} A_1 \in M_{n-1}(k) \\ rg(A) = 1 + rg(A_1) \end{cases}$

et une réc évidente nous assure l'existence d'un prod T de transv tq $TA = \begin{pmatrix} 1 & & & \times \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & \det A \end{pmatrix}$ $(rg(A_i) = n - i$ pour $i \in \{1, \dots, n-1\})$

Par suite, en effectuant $L_i \to L_i - \frac{a_{in}}{\det A} L_n$ pour $i \in \{1, \dots, n-1\}$, la dernière colonne devient $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \det A \end{pmatrix}$ et une réc évidente nous

assure l'existence d'un tel S.

<u>Montrons maintenant le lemme</u> :

OPS $\alpha_{11} \neq 0$ car sinon, on effectue $L_1 \to L_1 + L_k$ avec $\alpha_{k1} \neq 0$
En effectuant $L_i \to L_i - \frac{\alpha_{i1}}{\alpha_{11}} L_1$ pour $i \in \{2, \dots, n\}$, la 1ère

colonne devient $\begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, puis en effectuant $L_2 \to L_2 + L_1$ et

$L_1 \to L_1 + \left(\frac{1}{\alpha_{11}} - 1\right) L_2$, elle devient $\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha_{11} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, et en effectuant

$L_2 \to L_2 - \alpha_{11} L_1$, elle devient $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

Autrt dit, il existe un prod T de transv tq $TM = \begin{pmatrix} 1 & * \cdots * \\ 0 & \\ \vdots & M_1 \\ 0 & \end{pmatrix}$

avec $M_1 \in M_{n-1}(k)$ et $rg(M) = rg(TM) = 1 + rg(M_1)$.

<u>Appl</u> : 1) $SL_n(\mathbb{R})$ est connexe
2) $GL_n(\mathbb{R})$ a 2 comp connexes homéo : $GL_n^+(\mathbb{R})$ et $GL_n^-(\mathbb{R})$.

<u>Dém</u> :

1) Si $A \in SL_n(\mathbb{R})$, $A = B_{ij}(\lambda) \dots B_{kl}(\mu)$ donc
$$\begin{array}{rcl} [0,1] & \to & SL_n(\mathbb{R}) \\ t & \mapsto & B_{ij}(\lambda t) \dots B_{kl}(\mu t) \end{array}$$ est un chemin cont joignant
A et I ds $SL_n(\mathbb{R})$.

2) Si $A \in GL_n^+(\mathbb{R})$, $A = S^{-1} D_n(\lambda)$ avec $\lambda = \frac{1}{\det A} > 0$

donc $$\begin{array}{rcl} [0,1] & \to & GL_n^+(\mathbb{R}) \\ t & \mapsto & S^{-1} D_n(1 - t + \lambda t) \end{array}$$ est un chemin cont

joignant A et S^{-1} ds $GL_n^+(\mathbb{R})$ mais on sait joindre

S^{-1} et I par un chemin cont ds $SL_n(\mathbb{R}) \subset GL_n^+(\mathbb{R})$ donc $GL_n^+(\mathbb{R})$ est connexe.

De plus, $M \mapsto \begin{pmatrix} -1, & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} M$ réalise un homéo entre $GL_n^+(\mathbb{R})$ et $GL_n^-(\mathbb{R})$.