Décomp polaire [Gou] p 246

Th : $\varphi : O_n(\mathbb{R}) \times SDP_n \xrightarrow{\varphi} GL_n(\mathbb{R})$ est un homéo
$(O,S) \longmapsto OS$

Dém :
A voir : 1) φ est bijective
2) φ^{-1} est cont
Ccl : φ est un homéo (φ est cont)

---

1) Soit $M \in GL_n(\mathbb{R})$.
Analyse : Si $\exists (O,S) \in O_n(\mathbb{R}) \times SDP_n(\mathbb{R}),\ M = OS$
alors $\begin{cases} {}^tMM = SO^{-1}OS = S^2 \\ O = MS^{-1} \end{cases}$ (S est inv car sym déf pos)
Synthèse : ${}^tMM \in SDP_n(\mathbb{R})$ (elle est clair^t sym et est déf pos car ${}^tX({}^tMM)X = {}^t(MX)(MX) = \|MX\|^2$ pour tt $X \in \mathbb{R}^n$)
donc $\exists!\, S \in SDP_n(\mathbb{R}),\ {}^tMM = S^2$ (lemme).
De plus, $O := MS^{-1} \in O_n(\mathbb{R})$ (${}^tOO = S^{-1}\,{}^tMMS^{-1} = S^{-1}S^2S^{-1} = I$)
Donc $\exists!\,(O,S) \in O_n(\mathbb{R}) \times SDP_n(\mathbb{R}),\ M = OS$.

2) Soit $M_k = O_kS_k \in GL_n(\mathbb{R}) \longrightarrow M_\infty = O_\infty S_\infty \in GL_n(\mathbb{R})$.
Il suffit de mq O_∞ est l'unique val d'adh de (O_k)
car alors $O_k \to O_\infty$ ($O_n(\mathbb{R})$ est comp) donc
$S_k = O_k^{-1}M_k \longrightarrow O_\infty^{-1}M_\infty = S_\infty$ (l'inv et le prod st cont)
ie $(O_k, S_k) \longrightarrow (O_\infty, S_\infty)$.
Soit donc (O_{k_i}) une ss suite de (O_k) qui cvge vers $O \in O_n(\mathbb{R})$.
$O = O_\infty$?
$S_{k_i} = O_{k_i}^{-1}M_{k_i} \longrightarrow O^{-1}M_\infty =: S$ donc il suffit de mq
$S \in SDP_n(\mathbb{R})$ car alors $(O,S) = (O_\infty, S_\infty)$ par unicité de la décomp de M_∞ donc, en p, $O = O_\infty$.

Or, S est sym (la transp est cont) donc $S^2 = {}^t M_\infty M_\infty \in SDP_n(\mathbb{R})$
mais S est positive (${}^tXS_{k_i}X \geq 0$ pour $\forall X$ et $\forall i$ donc
${}^tXSX \geq 0$ pour $\forall X$) donc $S \in SDP_n(\mathbb{R})$ (lemme)

<u>Lemme</u> : Soit $H \in SDP_n(\mathbb{R})$.
Alors, $\exists ! R \in SP_n(\mathbb{R}), H = R^2$. De plus, $R \in SDP_n(\mathbb{R})$.

<u>Dém</u> :
<u>Unicité</u> :
On supp qu'un tel $R \in SP_n(\mathbb{R})$ existe.
On note h et r les end dt H et R st resp^t les mat ds la b.c de $\mathbb{R}^n$.
Alors, $\mathbb{R}^n = E_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus E_{\lambda_p}$ où les E_{λ_i} st les ss esp propres de h
(h est auto.adjoint donc diagonalisable) mais r commute
avec $h = r^2$ donc E_{λ_i} est stable par r.
On note $r_i = r_{|E_{\lambda_i}}$.
Alors, $r_i^2 = h_{|E_{\lambda_i}} = \lambda_i Id_{E_{\lambda_i}}$ donc la seule vp possible de r_i
est $\sqrt{\lambda_i}$ (si μ est vp de r_i, μ^2 est vp de r_i^2 donc $\mu^2 = \lambda_i$
et donc $\mu = \sqrt{\lambda_i}$ car les vp de r donc de r_i st ≥ 0)
mais r_i est diagonalisable (r donc r_i est auto.adjoint)
donc $r_i = \sqrt{\lambda_i}\, Id_{E_{\lambda_i}}$ pour $\forall i \in \{1, \ldots, p\}$ ce qui définit r
de manière unique.

<u>Existence</u> :
$\exists P \in O_n(\mathbb{R}), P^{-1}HP = {}^tPHP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ avec $\lambda_i > 0$

donc $R = P \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} P^{-1}$ convient.