Th de Hilbert [Per] p 44

Prop : Soit A un anneau comm unit. Alors, les asse :
(i) tt idéal de A est de type fini
(ii) tte suite $\nearrow$ d'idéaux de A est stationnaire
(iii) tt ens non vide d'idéaux de A a un él^t max.

Dém :
(i) ⇒ (ii) : Soit (I_n) une suite $\nearrow$ d'idéaux de A.
Alors, $I = \bigcup_n I_n$ est un idéal de A (la suite est $\nearrow$)
donc $I = (a_1, \dots, a_k)$ avec $a_i \in A$ mais il existe
$N \in \mathbb{N}^*$ tq $a_1, \dots, a_k \in I_N$ (si $a_i \in I_{n_i}$, $N = \max n_i$
convient) donc $I = I_N$ et donc $I = I_n$
pour tt $n \geqslant N$.
(ii) ⇒ (iii) : Soit E un ens non vide d'idéaux de A.
Par l'abs, on supp que E n'ait pas d'él^t max.
On considère $I_1 \in E$ $(E \neq \emptyset)$.
Il existe alors $I_2 \in E$ tq $I_1 \subsetneq I_2$.
Par réc, on construit ainsi une suite $\nearrow$ d'idéaux de A
qui n'est pas stationnaire $\lightning$
(iii) ⇒ (i) : Soit I un idéal de A
$$E = \{\text{idéaux } J \text{ de } A,\ J \subset I \text{ et } J \text{ de type fini}\}$$
Alors, E a un él^t max J ($(0) \in E$) mais $I = J$
(sinon, il existe $a \in I \setminus J$ donc $J + (a) \in E$ tq
$J \subsetneq J + (a)$ $\lightning$) donc I est de type fini.

Th de Hilbert : Si A est noethérien, $A[X]$ l'est aussi.

Dém : Soit (I_n) une suite $\nearrow$ d'idéaux de $A[X]$

On déf $d_n(I) = \{$coeff dom des élts de I qui sont de deg $n\} \cup \{0\}$
pour $\forall$ I idéal de $A[x]$ et $\forall n \in \mathbb{N}$.

On rq que $\begin{cases} d_n(I) \text{ est un idéal de } A \\ I \subset J \Rightarrow d_n(I) \subset d_n(J) \\ d_n(I) \subset d_{n+1}(I) \end{cases}$

A voir : Si $I \subset J$, $I = J$ dès que $d_n(I) = d_n(J)$ pour $\forall n \in \mathbb{N}$.

Ccl : $\{d_k(I_n),\ k, n \in \mathbb{N}\}$ a un élt max $d_\ell(I_m)$ (A est noeth)

et pour $\forall k \leq \ell$, $(d_k(I_n))_n$ est stationnaire à partir de n_k

(A est noeth) donc pour $\forall k \in \mathbb{N}$, $(d_k(I_n))_n$ est stationnaire à partir de $N = \max(m, n_0, \dots, n_\ell)$.

En effet,

si $k > \ell$, pour $\forall n \geq N$, $d_k(I_n) \supset d_k(I_N) \supset d_k(I_m) \supset d_\ell(I_m)$

donc $d_k(I_n) = d_k(I_N)$ $(= d_\ell(I_m))$

si $k \leq \ell$, pour $\forall n \geq N$, $d_k(I_n) = d_k(I_N)$ $(= d_k(I_{n_k}))$.

Par suite, (I_n) est stationnaire à partir de N.

Soit $I \subset J$ tq $d_n(I) = d_n(J)$ pour $\forall n \in \mathbb{N}$.

Par l'abs, on supp $I \neq J$.

Il existe alors $P \in J \setminus I$ de deg minimal k donc le coeff dom de P est ds $d_k(J) = d_k(I)$ et donc il existe $Q \in I$ de deg k et de m̂ coeff dom que P.

Par suite, $P - Q \in J \setminus I$ et $\deg(P - Q) < k$ ce qui contredit la minimalité de k.