Classif des fq pour un corps fini

[Per] p 129

<u>Th</u> : Soit $\mathbb{F}_q$ un corps fini de car $\neq 2$

E un $\mathbb{F}_q$-ev de dim n

$\alpha \in \mathbb{F}_q^* \setminus \mathbb{F}_q^{*2}$

Q une fq sur E de rg r.

Alors, ds une certaine base, Q a pour matrice

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} I_{r-1} & & 0 \\ & \alpha & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$$ suivant que son discriminant n'est pas ou est un carré de $\mathbb{F}$

<u>Dém</u> :

OPS $r=n$ ie Q non dégénérée (sinon, on considère un suppl V de $E^\perp$ ds E et on rq que Q a pour mat $\begin{pmatrix} [Q_{|V}] & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ds la réunion d'une base de V et d'une base de $E^\perp$

avec $\dim V = r$ et $Q_{|V}$ non dég)

On fait une réc sur $n \geq 1$:

<u>$n=1$</u> :

On considère (e_1) une base de E.

On rq que $Q(e_1) \in \mathbb{F}_q^*$ (Q est non dég)

Mais $\mathbb{F}_q^* = \mathbb{F}_q^{*2} \amalg \alpha \mathbb{F}_q^{*2}$. En effet, $\begin{array}{l} \mathbb{F}_q^* \to \mathbb{F}_q^{*2} \\ x \mapsto x^2 \end{array}$

est un morph de gpes surj de noyau $\{-1,1\}$ donc $|\mathbb{F}_q^{*2}| = \frac{|\mathbb{F}_q^*|}{2}$

et donc $\mathbb{F}_q^* / \mathbb{F}_q^{*2} = \{\bar{1}, \bar{\alpha}\}$.

Donc soit $Q(e_1) = \lambda^2$ avec $\lambda \in \mathbb{F}_q^*$ et $[Q]_{(\frac{e_1}{\lambda})} = (1)$

soit $Q(e_1) = \alpha\lambda^2$ avec $\lambda \in \mathbb{F}_q^*$ et $[Q]_{(\frac{e_1}{\lambda})} = (\alpha)$

$\underline{n \geq 2}$:

On considère $(e_1, \dots, e_n)$ une Bo de E

On note $a := Q(e_1) \in \mathbb{F}_q^*$

$b := Q(e_2) \in \mathbb{F}_q^*$

$\underline{A \text{ voir}}$: $\exists x, y \in \mathbb{F}_q$, $ax^2 + by^2 = 1$

$\underline{\text{Ccl}}$: $\exists \varepsilon_1 \in \langle e_1, e_2 \rangle$, $Q(\varepsilon_1) = 1$

Mais $H = \langle \varepsilon_1 \rangle^\perp$ est de dim $n-1$ (Q est non dég) donc il admet une base $\mathcal{B}$ tq $[Q_{|H}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & \alpha \end{pmatrix}$ (hyp réc)

et donc $[Q]_{(\varepsilon_1, \mathcal{B})} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & \alpha \end{pmatrix}$ ($\langle \varepsilon_1 \rangle \cap H = \{0\}$

donc $E = \langle \varepsilon_1 \rangle \oplus H$ et donc $(\varepsilon_1, \mathcal{B})$ est une base de E)

Qd y décrit $\mathbb{F}_q$, y^2 donc $\frac{1-by^2}{a}$ prend $\frac{q+1}{2}$ valeurs

$\left(\text{Card}(\mathbb{F}_q^2) = 1 + |\mathbb{F}_q^{*2}| = \frac{q+1}{2} \right)$ et donc

$\left\{ \frac{1-by^2}{a}, y \in \mathbb{F}_q \right\} \cap \mathbb{F}_q^2 \neq \emptyset$ $\left(\text{sinon, Card}(\mathbb{F}_q) \geq \frac{q+1}{2} + \frac{q+1}{2} > q \right)$

ie $\exists x, y \in \mathbb{F}_q$, $\frac{1-by^2}{a} = x^2$ ou encore $ax^2 + by^2 = 1$.