Eq de Fermat pour $n = 2, 4$ [Gou] [Com]

Prop : Pour que $(x,y,z) \in \mathbb{N}^{*3}$ soit sol de $x^2+y^2=z^2$ il faut et il suffit qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ et $m > n \in \mathbb{N}^*$ 1ers entre eux tq $(x,y,z) = (2kmn, k(m^2-n^2), k(m^2+n^2))$
ou $(k(m^2-n^2), 2kmn, k(m^2+n^2))$

Dém :

CN :

Soit $(x,y,z) \in \mathbb{N}^{*3}$ sol de $x^2+y^2=z^2$.

OPS $k = \text{pgcd}(x,y,z) = 1$ (sinon, on considère $\left(\frac{x}{k}, \frac{y}{k}, \frac{z}{k}\right)$)

x,y,z st 1ers entre eux 2 à 2 :

Par l'abs, on supp que $\text{pgcd}(x,y) \neq 1$.
Alors, il existe p 1er tq $p \mid \text{pgcd}(x,y)$ donc $p \mid z^2$ (p divise x^2 et y^2) et donc $p \mid z$ (lemme d'Euclide)
d'où $p \mid \text{pgcd}(x,y,z)$ ↯
On procède de m̂ pour x,z et y,z.

x ou y est pair :

Par l'abs, on supp x et y impairs.
Alors, x^2 et y^2 st $\equiv 1 \pmod 4$ $\left((2n+1)^2 = 4n^2+4n+1 \equiv 1 \pmod 4\right)$
donc $z^2 \equiv 2 \pmod 4$ ↯ (un carré d'entier est $\equiv 0$ ou $1 \pmod 4$)

OPS x pair (sinon, on considère (y,x,z))

Rq : y et z st impairs ($x \wedge y = 1$ et $x \wedge z = 1$)

$\exists\, m > n \in \mathbb{N}^*$ 1ers entre eux, $\frac{z-y}{2} = n^2$ et $\frac{z+y}{2} = m^2$:

$$\underbrace{\left(\frac{x}{2}\right)^2}_{\in \mathbb{N}^*} = \underbrace{\left(\frac{z-y}{2}\right)}_{\in \mathbb{N}^*}\underbrace{\left(\frac{z+y}{2}\right)}_{\in \mathbb{N}^*}$$ mais $\frac{z-y}{2} \wedge \frac{z+y}{2} = 1$ | sinon,

il existe p 1er divisant $\frac{z-y}{2}$ et $\frac{z+y}{2}$ donc p divise $y = \frac{z+y}{2} - \frac{z-y}{2}$ et $z = \frac{z+y}{2} + \frac{z-y}{2}$ ↯ $(y \wedge z = 1)$ | donc il existe $m, n \in \mathbb{N}^*$ tq $\frac{z-y}{2} = n^2$ et $\frac{z+y}{2} = m^2$. De plus, $m > n$ $\left| m^2 > n^2 \right|$ et $m \wedge n = 1$ $\left(m^2 \wedge n^2 = 1 \right)$.

Ccl : $x = 2mn$, $y = m^2 - n^2$ et $z = m^2 + n^2$

CS : trivial

Prop : $x^4 + y^4 = z^4$ n'a pas de sol ds $\mathbb{N}^{*3}$.

Dém :

Il suffit de mq $x^4 + y^4 = z^2$ n'a pas de sol ds $\mathbb{N}^{*3}$

Par l'abs, on supp qu'il y en a.

On considère alors $(x, y, z) \in \mathbb{N}^{*3}$ une telle sol avec z minimal.

Rq : $k = \text{pgcd}(x, y, z) = 1$ (sinon, $\left(\frac{x}{k}, \frac{y}{k}, \frac{z}{k^2}\right)$ serait sol mais $\frac{z}{k^2} < z$)

. D'après la prop précédente, il existe $u > v \in \mathbb{N}^*$ 1ers entre eux tq $x^2 = 2uv$, $y^2 = u^2 - v^2$ et $z = u^2 + v^2$ (quitte à échanger x et y)

. v est pair :

u est impair (sinon, v est impair ($u \wedge v = 1$) donc $y^2 \equiv 0 - 1 \pmod 4$ ↯)

donc v est pair (sinon, $x^2 \equiv 2 \pmod 4$ ↯)

. D'après la prop précédente, il existe $r > s \in \mathbb{N}^*$ 1ers entre eux tq $v = 2rs$, $y = r^2 - s^2$ et $u = r^2 + s^2$ ($\text{pgcd}(v, y, u) = 1$ car $u \wedge v = 1$)

. Par suite, $x^2 = 4rs(r^2 + s^2)$ mais $r, s, r^2 + s^2$ st 1ers entre eux 2à2 (par exple, si $r \wedge r^2 + s^2 \neq 1$, il existe p 1er divisant r et $r^2 + s^2$ donc $p \mid r^2 - r^2 + s^2 = s^2$ et donc $p \mid s$ ↯ car $r \wedge s = 1$) donc il existe $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N}^*$ tq $r = \alpha^2$, $s = \beta^2$ et $r^2 + s^2 = \gamma^2$ et donc $\alpha^4 + \beta^4 = \gamma^2$ ↯

$\gamma \leq \gamma^2 = u < u^2 + v^2 = z$.