# Décomp de Dunford [Gou] p 193

<u>Th</u> : Soit $E$ un kev de dim $< \infty$
$f \in L(E)$ tq $\chi_f$ soit scindé
Alors, $\exists ! (d,n) \in L(E)^2$, $\begin{cases} d \text{ diagonalisable}, n \text{ nilpotent}. \\ f = d + n \\ dn = nd \end{cases}$

De plus, $d, n$ st des polyn en $f$.

<u>Dém</u> :

- <u>Existence</u> :

On considère $\chi_f = (-1)^n \prod_{i=1}^{s} (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$

$N_i = \ker (f - \lambda_i Id)^{\alpha_i}$

$p_i$ la proj sur $N_i$ parallèlt à $\bigoplus_{j \neq i} N_j$ $(E = N_1 \oplus \dots \oplus N_s)$

On pose $d = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i p_i$

$n = f - d$

<u>$d$ est diagonalisable</u> :

Si $\mathcal{B}_i$ est une base de $N_i$, $[d]_{(\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_s)} = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{\alpha_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_s I_{\alpha_s} \end{pmatrix}$

<u>Les $p_i$ st des polyn en $f$</u> :

Les $Q_i = \prod_{j \neq i} (X - \lambda_j)^{\alpha_j}$ st 1ers entre eux ds leur ensemble donc

il existe $U_1, \dots, U_s \in k[X]$ tq $U_1 Q_1 + \dots + U_s Q_s = 1$ (th de Bezout)

et donc $U_1 Q_1(f)(x) + \dots + U_s Q_s(f)(x) = x$ pour $\forall x \in E$

mais $U_i Q_i(f)(x) \in N_i$ $\left( (f - \lambda_i Id)^{\alpha_i} \circ U_i Q_i(f)(x) = U_i(f) \circ \chi_f(f)(x) = 0 \right)$

donc $p_i = U_i Q_i(f)$ par unicité de l'écriture ds $E = N_1 \oplus \dots + N_s$.

<u>csq</u> : $d$ et $n$ st des polyn en $f$ donc ils commutent.

$n$ est nilpotent :

$n = \sum_{i=1}^{s} (f - \lambda_i Id)\, p_i$ $\left(\sum_{i=1}^{s} p_i = Id\right)$ donc $n^q = \sum_{i=1}^{s} (f - \lambda_i Id)^q p_i$

pour tt $q \in \mathbb{N}$ (on fait une réc sur $q$ en utilisant que $p_i$ commute avec $f$ et que $p_i \circ p_j = \begin{cases} p_i & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ ).

Mais, si $q = \max \alpha_i$, $(f - \lambda_i Id)^q p_i = \left[(X - \lambda_i)^\alpha U_i Q_i\right](f) = 0$ pour tt $i$

$\left(\chi_f \mid (X - \lambda_i)^\alpha Q_i\right)$ donc $n^q = 0$.

. Unicité :

Soit $(d,n)$ comme ds l'énoncé

$(d', n')$, $\begin{cases} d' \text{ diag}, n' \text{ nilp} \\ f = d' + n' \\ d'n' = n'd' \end{cases}$

$d - d'$ est diagonalisable :

$d'$ commute avec $d' + n' = f$ donc avec $d$ (qui est un polyn en $f$) et donc $d, d'$ st codiagonalisables d'où le résultat

$d - d'$ est nilpotent :

$n'$ commute avec $n$ ($\hat{m}$ arg que préc) donc

$(n' - n)^{p+q} = \sum_{i=0}^{p+q} C_{p+q}^{i}\, n'^{p+q-i} (-1)^i n^i = 0$ avec $p, q$ tq $n^p = n'^q = 0$

et donc $d - d' = n' - n$ est nilpotent

Ccl : $d - d' = 0$ et $n' - n = 0$.

Appl : Si $M = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$, $\exp(M) = \begin{pmatrix} -6e^2 + 3e^3 & -4e^2 + 4e^3 & 10e^2 - 6e^3 \\ -6e^2 + 3e^3 & -3e^2 + 4e^3 & 9e^2 - 6e^3 \\ -7e^2 + 3e^3 & -4e^2 + 4e^3 & 11e^2 - 6e^3 \end{pmatrix}$

Dém : . $\chi_M = -(X-2)^2 (X-3)$, $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$

. $Q_1 = X - 3$, $Q_2 = (X-2)^2$

. On cherche $U_1, U_2$ tq $U_1 Q_1 + U_2 Q_2 = 1$

On décompose en élts simples $\frac{1}{(X-2)^2(X-3)}$ :

$$\frac{1}{(X-2)^2(X-3)} = -\frac{1}{X-2} - \frac{1}{(X-2)^2} + \frac{1}{X-3}$$

Par suite, $\frac{1}{(X-2)^2(X-3)} = -\frac{X-1}{(X-2)^2} + \frac{1}{X-3}$

donc $1 = -(X-1)(X-3) + (X-2)^2$

et donc $U_1 = -(X-1)$, $U_2 = 1$ conviennent.

- $p_1 = -(M-I)(M-3I)$, $p_2 = (M-2I)^2$
- $D = \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2$, $N = (M-\lambda_1 I)p_1 + (M-\lambda_2 I)p_2$
- $\exp(M) = \exp(D+N)$ $\quad (M = D+N)$

$$= \exp(D)\exp(N) \quad (DN = ND)$$

- $\exp(D) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!}(\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2)^p$

$$= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!}(\lambda_1^p p_1 + \lambda_2^p p_2)$$

$$= e^{\lambda_1} p_1 + e^{\lambda_2} p_2$$

- $\exp(N) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!}\left((M-\lambda_1 I)p_1 + (M-\lambda_2 I)p_2\right)^p$

$$= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!}\left((M-\lambda_1 I)^p p_1 + (M-\lambda_2 I)^p p_2\right)$$

$$= \left(I + (M-\lambda_1 I)\right)p_1 + p_2$$

- $\exp(M) = e^{\lambda_1}\left(I + (M-\lambda_1 I)\right)p_1 + e^{\lambda_2} p_2$

et le résultat suit.