Th de D'Alembert-Gauss. [Gou] p 86.

Th : Un polyn de $\mathbb{C}[X]$ de deg ≥ 1 admet une racine ds $\mathbb{C}$.

Dém :

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de deg ≥ 1.

A voir : Un polyn de $\mathbb{R}[X]$ de deg ≥ 1 admet une racine ds $\mathbb{C}$.

Ccl : Il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tq $P\overline{P}(\alpha) = 0$ donc $P(\alpha) = 0$ ou $\overline{P}(\alpha) = 0$ et donc $P(\alpha) = 0$ ou $P(\overline{\alpha}) = 0$.

Il suffit de mq pour $\forall n \in \mathbb{N}$, un polyn unitaire de $\mathbb{R}[X]$ de deg $d = 2^n q$ avec q impair admet une racine ds $\mathbb{C}$

On fait une réc sur $n \in \mathbb{N}$:

$n = 0$:

Soit P un polyn unitaire de $\mathbb{R}[X]$ de deg impair.

Alors, $P \underset{+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $P \underset{-\infty}{\longrightarrow} -\infty$ donc il existe $a > 0$ tq $P(a) > 0$ et $P(-a) < 0$ et donc il existe $c \in]-a, a[$ tq $P(c) = 0$ (TVI).

$n > 0$:

Soit P un polyn unitaire de $\mathbb{R}[X]$ de deg $d = 2^n q$ avec q imp.

On considère $\mathbb{K}$ son corps de décomp sur $\mathbb{R}$

$x_1, \dots, x_d$ ses racines ds $\mathbb{K}$

On définit $y_{i,j}(c) = x_i + x_j + c x_i x_j$ pour $\forall c \in \mathbb{R}$ et $\forall (i,j) \in T = \{(i,j) \mid 1 \leq i < j \leq d\}$.

- $\forall c \in \mathbb{R}, \exists (i_c, j_c) \in T$ tq $y_{i_c, j_c}(c) \in \mathbb{C}$:

Soit $c \in \mathbb{R}$.

Il suffit de mq $Q = \prod_{(i,j) \in T} (X - y_{i,j}(c))$ est à coeff réels et de deg $2^{n-1} q'$ avec q' imp (hyp de réc).

Or, les coeff de Q st les fcts sym élém des $y_{i,j}(c)$ (au signe près) mais les $y_{i,j}(c)$ st des polyn à coeff réels sym en les x_i donc les coeff de Q aussi.
Par suite, les coeff de Q sont des polyn à coeff réels en les fcts sym élém des x_i mais ces dernières st les coeff de P (au signe près) d'où $Q \in \mathbb{R}[X]$.
De plus,
$$\deg Q = \operatorname{Card} \Gamma = \sum_{i=1}^{d-1} d-i = d(d-1) - \frac{d(d-1)}{2} = 2^{n-1} q\,(d-1)$$

• On considère alors $\begin{array}{l} \mathbb{R} \to \Gamma \\ c \mapsto (i_c, j_c) \end{array}$ qui n'est pas injective ($\mathbb{R}$ est ∞ et Γ est $< \infty$) donc il existe $c \neq c' \in \mathbb{R}$ tq $(i_c, j_c) = (i_{c'}, j_{c'}) =: (r, s)$.
On rq que $x_r x_s$ et $x_r + x_s$ st ds $\mathbb{C}$. En effet, $(x_r + x_s) + c(x_r x_s)$ et $(x_r + x_s) + c'(x_r x_s)$ st ds $\mathbb{C}$ donc $(c - c')(x_r x_s)$ est ds $\mathbb{C}$ et donc $x_r x_s$ aussi d'où la rq.
Par suite, $X^2 - (x_r + x_s)X + x_r x_s \in \mathbb{C}[X]$ donc x_r et x_s st ds $\mathbb{C}$.