Réd d'un end auto-adjoint [TIS] p 238

Th : Soit E un esp euclidien de dim n et $u \in \mathcal{L}(E)$ tq $u = u^*$.
Alors, (i) les vp de u ds $\mathbb{C}$ st réelles
(ii) il existe une BON de E formée de vect propres de u.

Dém :

(i) :

On considère $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la mat de u ds une certaine base.
Par déf, les vp de u ds $\mathbb{C}$ st les vp de M ds $\mathbb{C}$ ie les racines de $\det(M - XI_n) \in \mathbb{R}[X]$ ds $\mathbb{C}$ donc u a n vp ds $\mathbb{C}$ comptées avec ordre de mult ($\mathbb{C}$ est alg^t clos).
Soit λ une vp de u ds $\mathbb{C}$.
Il existe alors $Z \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ tq $MZ = \lambda Z$ donc

$$\begin{aligned}
\overline{\lambda}\, \|Z\|^2 &= \overline{\lambda}\, Z^* Z && \text{où } Z^* = {}^t\overline{Z} \\
&= Z^* M^* Z && \text{où } M^* = {}^t\overline{M} \\
&= Z^* M Z && (u = u^*) \\
&= \lambda Z^* Z \\
&= \lambda \|Z\|^2
\end{aligned}$$

et donc $\overline{\lambda} = \lambda$ $(Z \neq 0)$ d'où $\lambda \in \mathbb{R}$.

(ii) :

On considère $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}$ les vp de u
$E_{\lambda_1}, \dots, E_{\lambda_r}$ les ss esp propres associés
$F = E_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_r}$.

A voir : 1) les E_{λ_i} st orthog 2 à 2
2) $F = E$

Ccl : En prenant $\mathcal{B}_i$ une BON de E_{λ_i} pour tt i, $(\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_r)$ convient.

1) Soit $i \neq j \in \{1, \dots, r\}$, $x \in E_{\lambda_i}$ et $y \in E_{\lambda_j}$.
Alors, $\lambda_i \langle x, y \rangle = \langle u(x), y \rangle$
$= \langle x, u^*(y) \rangle$
$= \langle x, u(y) \rangle \quad (u = u^*)$
$= \lambda_j \langle x, y \rangle$
donc $\langle x, y \rangle = 0 \quad (\lambda_i \neq \lambda_j)$.

2) Il suffit de mq $F^\perp = \{0\}$ car alors $E = F \oplus F^\perp = F$.

$F^\perp$ est stable par u :

Soit $x \in F^\perp$.
Il suffit de mq $u(x) \in E_{\lambda_i}^\perp$ pour tt $i \in \{1, \dots, r\}$.
Or, si $i \in \{1, \dots, r\}$ et $y \in E_{\lambda_i}$, $\langle u(x), y \rangle = \langle x, u^*(y) \rangle$
$= \langle x, u(y) \rangle$
$= \lambda_i \langle x, y \rangle$
$= 0 \quad (y \in F)$

$F^\perp = \{0\}$:

Par l'abs, on supp $F^\perp \neq \{0\}$.
Alors, $v = u_{|F^\perp} \in L(F^\perp)$ tq $v = v^*$ ($F^\perp$ est stable par u)
donc v a une vp réelle (i) et donc il existe un vect propre ds $F^\perp$ pour v donc pour u ce qui contredit la déf de F.