Résultant

[Gou] p207

Th : Soit $P = a_m X^m + \dots + a_0 \in k[X]$ de deg $m \geq 1$
$Q = b_n X^n + \dots + b_0 \in k[X]$ de deg $n \geq 1$
Alors, $P \wedge Q = 1 \iff \mathrm{Res}(P,Q) \neq 0$

Dém :

On va mq $P \wedge Q \neq 1 \iff \mathrm{Res}(P,Q) = 0$.

On considère $\varphi : k_{n-1}[X] \times k_{m-1}[X] \to k_{m+n-1}[X]$.
$(A,B) \mapsto AP - BQ$

Alors, φ est linéaire et sa mat ds les bases
$\{(1,0), \dots, (X^{n-1}, 0), (0,1), \dots, (0, X^{m-1})\}, \{1, \dots, X^{m+n-1}\}$
est

$$\begin{pmatrix} a_0 & & & b_0 & & \\ \vdots & \ddots & & \vdots & \ddots & \\ \vdots & & a_0 & b_n & & b_0 \\ a_m & & \vdots & & \ddots & \vdots \\ & \ddots & \vdots & & & \vdots \\ & & a_m & & & b_n \end{pmatrix}$$

donc $\det(\varphi) = \mathrm{Res}(P,Q)$

A voir : $P \wedge Q \neq 1 \iff \varphi$ n'est pas inj

Ccl : $P \wedge Q \neq 1 \iff \varphi$ n'est pas surj $\left(\dim k_{n-1}[X] \times k_{m-1}[X] = \dim k_{m+n-1}[X]\right)$
$\iff \det(\varphi) = 0$
$\iff \mathrm{Res}(P,Q) = 0$

$\Rightarrow$: Il existe $R \in k[X]$ de deg ≥ 1 divisant P et Q
donc $P = RP_1$ et $Q = RQ_1$ avec $P_1 \in k_{m-1}[X] \setminus \{0\}$
$Q_1 \in k_{n-1}[X] \setminus \{0\}$
et donc $Q_1 P = P_1 Q \; (= RP_1Q_1)$ ie $(Q_1, P_1) \in \ker(\varphi)$
d'où $\ker \varphi \neq \{(0,0)\}$.

$\Leftarrow$: Il existe $(A,B) \in \ker(\varphi) \setminus \{(0,0)\}$.

Par exple, $B \neq 0$.
Par l'abs, on supp $P \wedge Q = 1$
Comme $AP = BQ$, $P \mid B$ (th de Gauss) donc $\deg B \geq \deg P = m$
($B \neq 0$) ↯

Csq : Si k est alg^t clos, P et Q n'ont pas de racine commune ssi $\mathrm{Res}(P, Q) \neq 0$.

Dém : Il suffit de mq P et Q n'ont pas de racine commune ssi $P \wedge Q = 1$.
Or, la cond est suff pour k qcq et néc. dès que k est alg^t clos (en fait, elle est néc. dès que P ou Q est scindé)

Appl : Soit $\mathcal{D} = \{$mat de $M_n(\mathbb{C})$ diagonalisables$\}$
$\Gamma = \{$mat de $M_n(\mathbb{C})$ ayant n vp distinctes$\}$
Alors, $\Gamma = \mathring{\mathcal{D}}$.

Dém :
$\Gamma \subset \mathring{\mathcal{D}}$:
$M \in \Gamma \iff \chi_M$ n'a que des racines simples
$\iff \chi_M$ et χ_M' n'ont pas de racine commune
$\iff \mathrm{Res}(\chi_M, \chi_M') \neq 0$
donc $\Gamma = \varphi^{-1}(\mathbb{C}^*)$ avec $\varphi : \begin{array}{l} M_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C} \\ M \mapsto \mathrm{Res}(\chi_M, \chi_M') \end{array}$ cont
et donc Γ est ouvert mais $\Gamma \subset \mathcal{D}$ donc $\Gamma \subset \mathring{\mathcal{D}}$.

$\Gamma = \mathring{\mathcal{D}}$:
Par l'abs, on supp qu'il existe $M \in \mathring{\mathcal{D}} \setminus \Gamma$.
Alors, $\exists P \in GL_n(\mathbb{C})$, $P^{-1} M P = \begin{pmatrix} \lambda & & & 0 \\ & \lambda & & \\ & & \lambda_3 & \\ 0 & & & \ddots \\ & & & & \lambda_n \end{pmatrix}$

donc $M = \lim_{p \to \infty} P M_p P^{-1}$ avec $M_p = \begin{pmatrix} \lambda & 1/p & & 0 \\ 0 & \lambda & & \\ & & \lambda_3 \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$

mais $M_p \notin D$ $\left(\text{sinon, } \begin{pmatrix} \lambda & 1/p \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \text{ est diagonalisable donc égale à } \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right)$

ce qui contredit $M \in \mathring{D}$.