End semi. simples [Gou] p 219.

Th : Soit E un $\mathbb{K}$.ev de dim finie et $f \in L(E)$.
Alors, f est semi.simple ssi Π_f est sans facteur carré.

Dém

• CN :

Par l'abs, on supp que $\Pi_f = M^2 N$ avec M irréd ds $\mathbb{K}[X]$ et $N \in \mathbb{K}[X]$

On va mq $MN(f) = 0$ ce qui contredira la minimalité de Π_f.

Vu que $F = \ker M(f)$ est stable par f, il admet un suppl S stable par f donc il suffit de mq $MN(f) = 0$ sur F et S.

Or, si $x \in F$, $MN(f)(x) = N(f) \circ M(f)(x) = 0$

si $x \in S$, $MN(f)(x) \in F \cap S = \{0\}$. En effet,
$MN(f)(x) \in F$ car $M(f) \circ MN(f)(x) = \Pi_f(f)(x) = 0$ et
$MN(f)(x) \in S$ car S est stable par $MN(f)$ (il l'est par f)

• CS :

Soit F un sev stable par f.

On décompose $\Pi_f = M_1 \dots M_r$ en fact irréd.

On note $F_i = \ker M_i(f)$.

On rq que $E = F_1 \oplus \dots \oplus F_r$ (lemme des noyaux)

A voir : 1) $f_i := f_{|F_i} \in L(F_i)$ est semi.simple

2) $F = (F \cap F_1) \oplus \dots \oplus (F \cap F_r)$

Ccl : Vu que $F \cap F_i$ est stable par f_i, il admet un suppl S_i ds F_i stable par f_i (1).

Final^t, $E = \bigoplus_{i=1}^{r} F_i = \bigoplus_{i=1}^{r} [F \cap F_i \oplus S_i]$

$$= \left[\bigoplus_{i=1}^{r} F \cap F_i\right] \oplus \left[\bigoplus_{i=1}^{r} S_i\right]$$

$$\overset{2)}{=} F \oplus \underbrace{\left[\bigoplus_{i=1}^{r} S_i\right]}_{\text{stable par } f}$$

1) $f_i \in \mathcal{L}(F_i)$ et $\pi_{f_i} = M_i$ ($M_i(f_i) = 0$ et M_i est irréd) est irréd donc f_i est semi-simple (à justifier)

2) . $(F\cap F_1) \oplus \dots \oplus (F \cap F_r) \subset F$.

. $F \subset (F\cap F_1) \oplus \dots \oplus (F\cap F_r)$:

On note p_i la proj sur F_i parallèl^t à $\bigoplus_{j\neq i} F_j$.

On rq que $F \subset p_1(F) + \dots + p_r(F)$ ($Id_E = p_1 + \dots + p_r$)
donc il suffit de mq $p_i(F) \subset F \cap F_i$ mais $p_i(F) \subset p_i(E) = F_i$
donc il suffit de mq $p_i(F) \subset F$.
Or, p_i est un polyn en f (à justifier) donc F est stable par p_i (il l'est par f).

<u>Lemme</u> 1 : Soit E un k-ev de dim finie et $f \in \mathcal{L}(E)$.
Si π_f est irréd, f est semi-simple.

<u>Dém</u> : Soit F un sev stable par f.
OPS $F \neq \{0\}, E$ (sinon, c'est clair)
On prend $x_1 \in E \setminus F$.
On rq que $E_{x_1} = \{P(f)(x_1) \mid P \in k[X]\}$ est stable par f.
On mq $F \cap E_{x_1} = \{0\}$.
Par l'abs, on supp qu'il existe $y \in F \cap E_{x_1} \setminus \{0\}$.
Alors, $y = P(f)(x_1)$ avec $P \in k[X]$ mais
$P \notin \{P \in k[X], P(f)(x_1) = 0\} = \langle \pi_{x_1} \rangle$ donc $P \wedge \pi_{x_1} = 1$
($\pi_{x_1} \mid \pi_f$ donc $\pi_{x_1} = \pi_f$ est irréd) donc
il existe $U, V \in k[X]$ tq $UP + V\pi_{x_1} = 1$ (th de Bezout)
et donc $x_1 = U(f) \circ P(f)(x_1) = U(f)(y) \in F$ ↯.
Si $E = F + E_{x_1}$, c'est fini.
Sinon, on prend $x_2 \in E \setminus (F \oplus E_{x_1})$ et on recommence.
Vu que $\dim E < \infty$, le procédé s'arrête et $E = F \oplus \underbrace{[E_{x_1} \oplus \dots \oplus E_{x_k}]}_{\text{stable par } f}$

<u>Lemme 2</u> : Soit E un k-ev de dim finie, $f \in \mathcal{L}(E)$, $F = \beta \Pi_1^{\alpha_1} \dots \Pi_r^{\alpha_r}$ un polyn annulateur de f et $F_i = \ker \Pi_i^{\alpha_i}(f)$.
Alors, $E = F_1 \oplus \dots \oplus F_r$ et la proj p_i sur F_i parallèl^t à $\bigoplus_{j \neq i} F_j$ est un polyn en f.

<u>Dém</u> : On note $Q_i = \prod_{j \neq i} \Pi_j^{\alpha_j}$.

On rq que les Q_i st 1^{ers} entre eux ds leur ensemble donc il existe $U_1, \dots, U_r \in k[X]$ tq $U_1 Q_1 + \dots + U_r Q_r = 1$ (th de Bezout) et donc $U_1 Q_1(f)(x) + \dots + U_r Q_r(f)(x) = x$ pour $\forall x \in E$ mais $U_i Q_i(f)(x) \in F_i$ $\left(\Pi_i^{\alpha_i}(f) \circ U_i Q_i(f)(x) = U_i(f) \circ F(f)(x) = 0 \right)$ donc $U_i Q_i(f) = p_i$ par unicité de l'écriture ds $E = F_1 \oplus \dots \oplus F_r$.

<u>Rq</u> : C'est un peu long donc il faut choisir entre le lemme 1 et le lemme 2.