Un homéo réalisé par l'exp mat [MT] [Rom]

Prop : $\varphi : \begin{array}{l} Sym(n) \to Sym^{++}(n) \\ M \mapsto \exp(M) \end{array}$ est un homéo.

Dém :

A voir : 1) φ est bien déf
2) φ est surj
3) φ est inj
4) φ^{-1} est cont

Ccl : φ est un homéo (φ est cont)

---

1) Soit $A \in Sym(n)$.
$\exists P \in O(n)$, $A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} P^{-1}$ avec $\lambda_i \in \mathbb{R}$

donc $A^k = P \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^k \end{pmatrix} P^{-1}$ pour $\forall k \in \mathbb{N}$

et donc $\exp(A) = P \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix} P^{-1}$ (le prod est cont)

ie $\exp(A) = P \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix} {}^tP \in Sym^{++}(n)$.

2) Soit $B \in Sym^{++}(n)$.
$\exists P \in O(n)$, $B = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} P^{-1}$ avec $\lambda_i > 0$

mais $A = P \begin{pmatrix} \ln \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \ln \lambda_n \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} \ln \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \ln \lambda_n \end{pmatrix} {}^tP \in Sym(n)$

vérifie $\exp(A) = B$ (comme en 1)

3) Soit $A_1, A_2 \in Sym(n)$ tq $\exp(A_1) = \exp(A_2)$.

A_1 et A_2 commutent :

A_1 commute avec $\exp(A_2) = \exp(A_1)$ ($\exp(A_1)$ est un polyn en A_1) donc il suffit de mq A_2 est un polyn en $\exp(A_2)$.
Or, il existe $Q \in \mathbb{R}[x]$ tq $Q(e^{\lambda}) = \lambda$ pour tte vp λ de A_2 (prendre le polyn interp en les e^{λ} avec les $\lambda \neq 2$ à 2) donc

$$A_2 = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} Q(e^{\lambda_1}) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & Q(e^{\lambda_n}) \end{pmatrix} P^{-1} = Q(\exp(A_2)).$$

$A_1 = A_2$:

A_1 et A_2 st codiagonalisables (diag. et comm) ie il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ tq $A_1 = PD_1P^{-1}$ et $A_2 = PD_2P^{-1}$ avec D_1, D_2 diagonales réelles.
Par suite, $\exp(D_1) = \exp(D_2)$ donc $D_1 = D_2$ ($e : \mathbb{R} \to]0,+\infty[$ est inj) et donc $A_1 = A_2$.

4) Soit $B_p = \exp(A_p) \longrightarrow B_\infty = \exp(A_\infty)$.

$\|M\|_2 = \rho(M)$ pour $\forall M \in Sym(n)$:

Soit $M \in Sym(M)$.
$\exists (e_1, \dots, e_n)$ BON de $\mathbb{R}^n$, $Me_i = \lambda_i e_i$ avec $\lambda_i \in \mathbb{R}$
donc, si $X = x_1e_1 + \dots + x_ne_n$ avec $\|X\|_2 = 1$,
$\|MX\|_2^2 = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2 |x_i|^2 \leqslant \rho(M)^2$ et donc $\|M\|_2 \leqslant \rho(M)$
mais il existe i tq $\rho(M) = |\lambda_i|$ donc $\|Me_i\|_2 = |\lambda_i| = \rho(M)$
et donc $\|M\|_2 = \rho(M)$.

Les vp des B_p st ds un comp de $]0,+\infty[$:

- les vp des B_p st ds $]0,+\infty[$ ($B_p \in Sym^{++}(n)$)
- (B_p) cvge donc est bornée mais $\|B_p\|_2 = \rho(B_p)$ donc les vp des B_p st bornées par $M_1 > 0$
- De m, (B_p^{-1}) cvge (l'inv est cont) donc les vp des B_p^{-1}

st bornées par $M_2 > 0$

. Final^t, les vp des B_p st ds $[\frac{1}{M_2}, M_1] \subset]0,+\infty[$.

<u>(A_p) est bornée :</u>

Les vp des A_p st ds $\ln\left([\frac{1}{M_2}, M_1]\right)$ donc elles st bornées

$\left(\ln([\ ]) \text{ est comp donc borné}\right)$ et donc (A_p) est bornée.

<u>$A_p \to A_\infty$:</u>

Il suffit de mq A_∞ est la seule val d'adh de (A_p)

$\left((A_p) \text{ est borné}\right)$.

Soit donc A une telle val d'adh.

Alors, $\exp(A) = \exp(A_\infty)$ donc $A = A_\infty$

$\left(A \in Sym(n) \text{ et } \varphi \text{ est inj}\right)$