Décomp des appl aff

[Aud] p 23
[Tis] p 19 et 319

Th : Soit $f : X \to X$ aff.
Si $\vec{X} = \ker(\vec{f} - Id) \oplus Im(\vec{f} - Id)$, il existe un unique $a \in \vec{X}$ et une unique appl aff $g : X \to X$ ayant un pt fixe tq $f = t_a \circ g = g \circ t_a$.
De plus, $a \in \ker(\vec{f} - Id)$.

Dém :

Unicité :

On supp que a et g existent.
On note A un pt fixe de g.

Rq : 1) $\ker(\vec{g} - Id) = \ker(\vec{f} - Id)$ $\quad (\vec{g} = \vec{f})$

2) $a \in \ker(\vec{f} - Id)$.
(pour $\forall M \in X$, $g(M) + a = g(M+a) = g(M) + \vec{g}(a)$.
Eq, $\vec{g}(a) = a$ ie $a \in \ker(\vec{g} - Id)$)

3) $a = \overrightarrow{Af(A)}$ $\quad (f(A) = t_a(A))$

On supp que a' et g' vérifient aussi le th.
On note A' un pt fixe de g'.
Alors, $a - a' = \overrightarrow{AA'} - \vec{f}(\overrightarrow{AA'}) \in \ker(\vec{f} - Id) \cap Im(\vec{f} - Id) = \{0\}$
donc $a = a'$ et $g = g'$ $(= t_{-a} \circ f)$.

Existence :

Il suffit de trouver $A \in X$ tq $\overrightarrow{Af(A)} \in \ker(\vec{f} - Id)$
car alors $a = \overrightarrow{Af(A)}$ et $g = t_{-a} \circ f$ conviennent
(A est un pt fixe de g et $t_a \circ g = g \circ t_a$ car $a \in \ker(\vec{g} - Id)$)
On prend $O \in X$.
Alors $\overrightarrow{Of(O)} = a + (\vec{f} - Id)(b)$ avec $a \in \ker(\vec{f} - Id)$ et $b \in \vec{X}$.

donc $\overrightarrow{Mf(M)} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{Of(O)} + \vec{f}(\overrightarrow{OM})$
$= a + (\vec{f} - Id)(b + \overrightarrow{OM})$ pour tt $M \in X$
et donc $A \in X$ tq $\overrightarrow{OA} = -b$ convient.

Csq : Si $f \in Is(X)$, il existe un unique $a \in \vec{X}$ et une unique $g \in Is(X)$ ayant un pt fixe tq $f = t_a \circ g = g \circ t_a$.
De plus, $a \in \ker(\vec{f} - Id)$.

Dém :
Il suffit de mq $\vec{X} = \ker(\vec{f} - Id) \oplus Im(\vec{f} - Id)$ et $\hat{m}$ que $\ker(\vec{f} - Id) \cap Im(\vec{f} - Id) = \{0\}$ (th du rg).
Or, $\ker(\vec{f} - Id) \perp Im(\vec{f} - Id)$. En effet, si $x \in \ker(\vec{f} - Id)$ et $z = (\vec{f} - Id)(y)$ avec $y \in \vec{X}$,
$\langle x, z \rangle = \langle x, \vec{f}(y) - y \rangle$
$= \langle \vec{f}(x), \vec{f}(y) \rangle - \langle x, y \rangle$
$= 0$.
D'où le résultat.

Appl : Classif des isométries aff planes.

	avec pt fixe	sans pt fixe
directes	identité rotations	translations
indirectes	réflexions	sym. glissées

Dém :
Idée : Si f a un pt fixe O, f se comporte ds $\vec{X_O}$ comme $\vec{f}$ ds $\vec{X}$ donc on est ramené à la classif des isométries lin planes. Sinon, on utilise le th de décomp des isométries.

1^{er} cas : f a un pt fixe O.

Alors, $\mathrm{Fix}(f) = O + \ker(\vec{f} - Id)$ donc,
soit $\dim \ker(\vec{f} - Id) = 0$ et f est une rot de centre O
soit " " $= 1$ et f est la réfl de dte $\mathrm{Fix}(f)$
soit " " $= 2$ et f est l'identité.

2^e cas : f n'a pas de pt fixe.

Il existe alors un unique $a \in \vec{X}$ et une unique $g \in Is(X)$ ayant un pt fixe O tq $f = t_a \circ g = g \circ t_a$.
De plus, $\dim \ker(\vec{g} - Id) \geq 1$ (sinon, $\ker(\vec{f} - Id) = \{0\}$ donc f a un unique pt fixe) donc,
soit $\dim \ker(\vec{g} - Id) = 1$ et f est une sym glissée
soit " " $= 2$ et $f = t_a$.