Th fond de la géom aff [Tis] p 170.

Th : Soit X, X' deux esp aff de dim $n \geq 2$ sur un corps k de car 0.
Si $f : X \to X'$ est une bijection qui transforme 3 pts alignés en 3 pts alignés, f est semi-aff.
En p, si $k = \mathbb{R}$, f est aff.

Dém :
Soit $o \in X$.
A voir : 1) f transforme une dte en une dte et 2 dtes // en 2 dtes //.
2) $f(x + \vec{oy}) = f(x) + \overrightarrow{f(o)f(y)}$ pour $\forall x \neq y \in X$
3) $\exists \sigma \in Aut(k)$ indép de o tq
$f(o + \alpha\vec{oe}) = f(o) + \sigma(\alpha)\overrightarrow{f(o)f(e)}$
pour $\forall \alpha \in k$ et $\forall e \neq o \in X$.

Ccl : $u : \vec{X} \to \vec{X}$ est σ-linéaire.
$a \mapsto \overrightarrow{f(o)f(o+a)}$

En effet, 2) nous assure que $u(a+b) = u(a) + u(b)$ pour $\forall a \neq b \in \vec{X}$ ($a = \vec{ox}$ et $b = \vec{oy}$) et 3) nous assure que $u(\alpha a) = \sigma(\alpha)u(a)$ pour $\forall \alpha \in k$ et $\forall a \in \vec{X} \setminus \{0\}$ ($a = \vec{oe}$).

---

1) **Rq 1** : Si $A = \{x_0, \dots, x_m\}$ est aff^t libre, $f(\langle A \rangle) \subset \langle f(A) \rangle$.

On fait une réc sur $m \in \{0, \dots, n\}$:
$m = 0$: c'est vrai
$m \geq 1$: Soit $A = \{x_0, \dots, x_m\}$ aff^t libre et $x \in \langle A \rangle$.
Alors, $x = t_0 x_0 + \dots + t_m x_m$ avec $t_0 + \dots + t_m = 1$
mais il existe $i \in \{0, \dots, m\}$ tq $t_i \neq 1$
($m \geq 1$ et car$(k) \neq m$), par ex^{ple} $t_m \neq 1$,

donc $x = (1-t_m)x' + t_m x_m$ avec $x' = \frac{1}{1-t_m}(t_0 x_0 + \dots + t_{m-1}x_{m-1})$

et donc, par hyp de réc, $f(x) \in \langle f(x'), f(x_m) \rangle$ et $f(x') \in \langle f(x_0), \dots, f(x_{m-1}) \rangle$ d'où $f(x) \in \langle f(A) \rangle$.

<u>Rq 2</u> : Si $A = \{x_0, \dots, x_m\}$ est aff^t libre, $f(A)$ l'est aussi.

On complète A en un repère aff $B = \{x_0, \dots, x_n\}$ de X.
Par l'abs, on supp que $f(A)$ n'est pas aff^t libre.
Alors, $f(B)$ n'est pas aff^t libre donc $\dim \langle f(B) \rangle < \dim X'$ ↯
$(X' = f(X) = f(\langle B \rangle) \subset \langle f(B) \rangle)$

• <u>f transf une dte en une dte</u> :

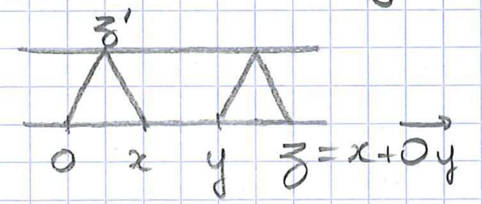
Soit $D = xy$.
Alors, $f(xy) \subset f(x)f(y)$ par hyp.
Récipoqu^t, $f(x)f(y) \subset f(xy)$. En effet, si $z' \in f(x)f(y)$, $z' = f(z)$ avec $z \in X$ et $\hat{m}$ $z \in xy$ car sinon, $\{x, y, z\}$ est aff^t libre donc $\{f(x), f(y), f(z)\}$ aussi (rq 2) ↯

• <u>f transf 2 dtes // en 2 dtes //</u> :

Soit $D = xy$ et $D' = x'y'$ 2 dtes // et distinctes.
On note $P = \langle D, D' \rangle = \langle x, y, x' \rangle$.
Alors, $f(P) \subset \langle f(x), f(y), f(x') \rangle =: P'$ (rq 1)
donc P' est un plan aff (rq 2) ds lequel $f(D)$ et $f(D')$ st sans pt commun ie $f(D)$ et $f(D')$ st //.

2) Soit $x \neq y \in X$.
D'après 1), on a :
<u>1$^{\text{er}}$ cas</u> : $0, x, y$ non alignés

2ème cas : O, x, y alignés



3) Soit $e \neq O \in X$.

On note $D = \langle O, e \rangle$.

On prend $\overrightarrow{Oe}$ (resp $\overrightarrow{f(O)f(e)}$) comme vect dir de D (resp $f(D)$)

On considère $\sigma : k \to k$
$$\overline{Ox} \mapsto \overline{f(O)f(x)}$$

N.B : A la source, $k = \{\overline{Ox}, x \in D\}$

Au but, $k = \{\overline{f(O)y}, y \in f(D)\}$

Alors, $f(O + \alpha \overrightarrow{Oe}) = f(O) + \sigma(\alpha)\,\overrightarrow{f(O)f(e)}$ pour tt $\alpha \in k$ par déf de σ.

$\sigma \in \mathrm{Aut}(k)$:

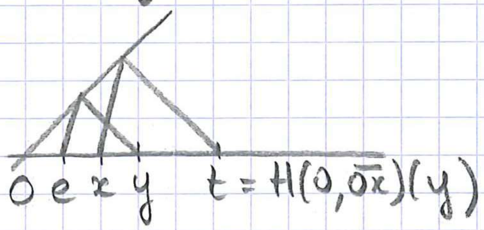
Soit $\overline{Ox}, \overline{Oy} \in k$.

- $\sigma(\overline{Ox} + \overline{Oy}) = \sigma(\overline{Ox}) + \sigma(\overline{Oy})$?

$\overline{Ox} + \overline{Oy} = \overline{Oz}$ avec z construit comme en 2) 2ème cas.

- $\sigma(\overline{Ox}\,\overline{Oy}) = \sigma(\overline{Ox})\,\sigma(\overline{Oy})$?

$\overline{Ox}\,\overline{Oy} = \overline{Ot}$ avec t construit de la façon suivante :



(Thalès)

σ est indép de O et e :

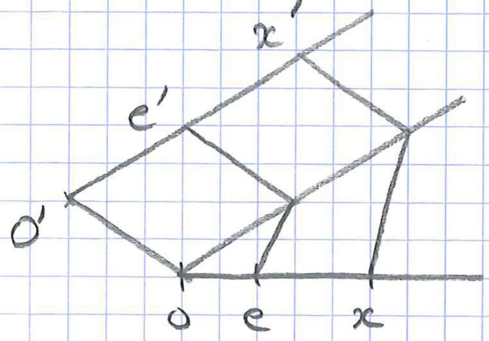
Soit $O' \neq e' \in X$.

On note σ' l'aut de k correspondant.

Soit $\alpha \in k$.

Il existe alors $x \in Oe$ tq $\alpha = \overline{Ox}/\overline{Oe}$ mais $\alpha = \overline{O'x'}/\overline{O'e'}$

avec x' construit de la façon suivante :



(Thalès)

donc $\overline{f(o)f(x)}/\overline{f(o)f(e)} = \overline{f(o')f(x')}/\overline{f(o')f(e')}$

ie $\sigma(\alpha) = \sigma'(\alpha)$.