Th de Carathéodory [Gou] p 53.

Th : Soit E un $\mathbb{R}$-evn de dim n et $A \subset E$.
Alors, $\operatorname{conv}(A) = \left\{ \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i \mid x_i \in A, \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1 \right\}$

Dém :

Il suffit de mq si x est barys des $(x_i)_{i \in \{1,\dots,p\}} \subset A$ affectés de coeff ≥ 0 avec $p \in \mathbb{N}^*$, il existe $J \subset \{1,\dots,p\}$ de card $\leq n+1$ tq x soit barys des $(x_i)_{i \in J}$ affectés de coeff ≥ 0.

On considère $\Gamma = \{ J \subset \{1,\dots,p\}$ tq x soit barys des $(x_i)_{i \in J}$ affectés de coeff $\geq 0 \}$

On note $q = \min\{\operatorname{Card}(J), J \in \Gamma\} = \operatorname{Card}(J_0)$
($\{\operatorname{Card}(J), J \in J\}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$).

Par l'abs, on supp $q \geq n+2$.

A voir : Il existe $i_0 \in J_0$ tq $J_0 \setminus \{i_0\} \in \Gamma$

Ccl : La minimalité de q est contredite donc $q \leq n+1$.

Vu que $\dim E = n$, il existe une famille $(\mu_i)_{i \in J_0}$ d'él[ts] non ts nuls tq $\sum_{i \in J_0} \mu_i x_i = 0$ et $\sum_{i \in J_0} \mu_i = 0$.

En effet, si $j \in J_0$, les $q-1$ vect $x_i - x_j$ st lin. liés ($q-1 \geq n-1$) donc il existe une famille $(\mu_i)_{i \in J_0 \setminus \{j\}}$ d'él[ts] non ts nuls tq $\sum_{i \in J_0 \setminus \{j\}} \mu_i (x_i - x_j) = 0$ et donc,

en posant $\mu_j = -\sum_{i \in J_0 \setminus \{j\}} \mu_i$, $(\mu_i)_{i \in J_0}$ convient.

On note $\alpha = \min\left\{\frac{\lambda_i}{\mu_i}, \mu_i > 0\right\} = \frac{\lambda_{i_0}}{\mu_{i_0}}$ avec $i_0 \in J_0$

($\left\{\frac{\lambda_i}{\mu_i}, \mu_i > 0\right\}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$).

On rq que $x = \sum_{i \in J_0} (\lambda_i - \alpha \mu_i) x_i$, $\lambda_i - \alpha \mu_i \geq 0$ et

$\sum_{i\in J_0}(\lambda_i-\alpha\mu_i)=1$ mais $\lambda_{i_0}-\alpha\mu_{i_0}=0$ d'où le résultat.

Appl : Soit E un $\mathbb{R}$.evn de dim n et A un comp de E.
Alors, conv (A) est comp.

Dém : On note $\Delta=\left\{(\lambda_1,\dots,\lambda_{n+1})\in\mathbb{R}_+^{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i=1\right\}$.

On considère $\varphi : \Delta\times A^{n+1} \longrightarrow E$

$$(\lambda_1,\dots,\lambda_{n+1},x_1,\dots,x_{n+1}) \longmapsto \sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i x_i.$$

On rq que conv$(A)=\varphi(\Delta\times A^{n+1})$ (th de Carath)
mais φ est cont et $\Delta\times A^{n+1}$ est comp comme
prod de comp (Δ est fermé ds le comp $[0,1]^{n+1}$)
d'où le résultat.