101

Gpe opérant sur un ens. Exples et appl

I) Déf et op naturelles

Déf : op
op fidèle
orbite
op transitive
stabilisateur
op naturelle

Exples : 1) Si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, $\langle\sigma\rangle$ opère naturellt sur $\{1, .., n\}$ et les orbites fournissent la décomp de σ en cycles disj

2) $SO_n(\mathbb{R})$ opère naturellt sur $\mathbb{R}^n$ et les orbites st les sphères centrées en 0. Ep, $SO_n(\mathbb{R})$ opère transitivt sur S^{n-1} et le stab d'un pt est iso à $SO_{n-1}(\mathbb{R})$.

II) Orbites et stabilisateurs

1) Aspect algébrique

- $G/Stab(x) \to Orb(x)$ est une bijection
  $\bar{g} \mapsto g.x$

$\to$ Si G est $< \infty$, $|G| = |Orb(x)||Stab(x)|$

$\Rightarrow$ Th de Cauchy

2) Aspect topologique

Déf : op cont

- Soit G un gpe top opérant cont sur un esp top sép X.

Si G est comp, $G/\mathrm{Stab}(x) \to \mathrm{Orb}(x)$ est un homéo.
$\bar{g} \mapsto g.x$

$\Rightarrow SO_n(\mathbb{R})$ est connexe.

III) Op par conjugaison

1) Un voc spécifique

Déf : classe de conj
élts conjugués
centralisateur

Exples : 1) Les cycles d'ordre 3 st conj ds $\mathcal{A}_n$ $(n \geq 5)$
2) Les transv st conj ds $SL_n(\mathbb{R})$ $(n \geq 3)$
3) Les renv st conj ds $SO_n(\mathbb{R})$ $(n \geq 2)$

2) Eq des classes

$\Rightarrow$ le centre d'un p-gpe non trivial est non trivial
$\Rightarrow$ Th de Wedderburn

IV) Op par translation

- G opère sur lui-m̂ par transl (à gche)

$\Rightarrow$ "Th" de Cayley

- G opère sur G/H par transl (à dte)

$\Rightarrow$ Un gpe ∞ G ayant un ssgpe $H \neq G$ d'indice $< \infty$ n'est pas simple
$\Rightarrow$ 1er th de Sylow

V) Pbs de classif

1) Mat équiv

- $GL_p(k) \times GL_q(k)$ opère sur $M_{p,q}(k)$ par $(P,Q).M = PMQ^{-1}$ et les orb st classifiées par le rg.

2) Mat semblables

- $GL_n(k)$ opère sur $M_n(k)$ par $P.M = PMP^{-1}$ et les orb st classifiées par les inv de sim.

3) Fq

- $GL_n(k)$ opère sur $S_n(k)$ par $P.M = PM{}^tP$ et les orb st classifiées par le rg si $k = \mathbb{C}$ et par la sign si $k = \mathbb{R}$.