103

Exples de ssgpes distingués et de gpes quotients. Appl

I) Déf et 1ers exples

Déf = ssgpe dist
Exples : 1) $\{e\}$ et G st dist ds G
2) Si G est abélien, $\forall$ ssgpe est dist
3) Un ssgpe d'indice 2 est dist

• le noyau d'un morph est dist
Exples : 1) $\mathcal{A}_n \triangleleft \mathfrak{S}_n$ et c'est le seul
2) $SL_n(\mathbb{R}) \triangleleft GL_n(\mathbb{R})$
3) $SO_n(\mathbb{R}) \triangleleft O_n(\mathbb{R})$

• Un ssgpe dist est le noyau d'un morph. Plus précist, si $H \triangleleft G$, H est le noyau de la proj can $\pi : G \to G/H$ où G/H est le gpe quotient de G par H

II) Centre et gpe dérivé

Déf : centre
• $Z(G) \triangleleft G$ et $G/Z(G) \simeq \mathrm{Int}(G)$
Exples : 1) Si G est abélien, $Z(G) = G$
2) $Z(\mathfrak{S}_n) = \{1\}$ $(n \geq 3)$
3) $Z(GL_n(\mathbb{R})) = \{\lambda I, \lambda \in \mathbb{R}^*\} \simeq \mathbb{R}^*$
4) $Z(O_n(\mathbb{R})) = \{\pm I\}$

Déf : gpe dérivé
• $D(G) \triangleleft G$ et $G/D(G)$ est le + gd quotient abélien de G
Exples : 1) Si G est abélien, $D(G) = \{e\}$
2) $D(\mathfrak{S}_n) = \mathcal{A}_n$ $(n \geq 2)$
3) $D(GL_n(\mathbb{R})) = SL_n(\mathbb{R})$
4) $D(O_n(\mathbb{R})) = SO_n(\mathbb{R})$

III) Dévissage

1) Principe

- Si $H \triangleleft G$, $1 \to H \hookrightarrow G \xrightarrow{\pi} G/H \to 1$ est une suite exacte. Si de plus, cette suite est scindée, $G \simeq H \rtimes G/H$

2) Exples

- $\mathfrak{S}_n \simeq \mathcal{A}_n \rtimes \{\pm 1\}$
- $Gl_n(\mathbb{R}) \simeq Sl_n(\mathbb{R}) \rtimes \mathbb{R}^*$
- $O_n(\mathbb{R}) \simeq SO_n(\mathbb{R}) \rtimes \{\pm 1\}$ et le prod est direct si n est impair.

3) Gpes simples (indévissables)

Déf: gpe simple

Exples: 1) $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est simple pour p 1er

2) $\mathcal{A}_n$ est simple pour $n \geq 5$

3) $SO_3(\mathbb{R})$ est simple

IV) Gpe quotient et réc.

- $SO_n(\mathbb{R})$ est connexe
- Si G est d'ordre p^α, il admet un ssgpe d'ordre p^i pour tt $i \in \{0, \dots, \alpha-1\}$.