Gpes finis. Exples et appl.

I) Propriétés (G est un gpe fini)

1) Th de Lagrange

2) Th de Cauchy

3) p-gpes

Déf : p-gpe
- Si $|G| = p$, G est cyclique
- Le centre d'un p-gpe non trivial est non trivial

$\Rightarrow$ Si $|G| = p^2$, G est abélien

$\Rightarrow$ Si $|G| = p^\alpha$, G contient un ssgpe d'ordre p^i pour tt $i \in \{0, \dots, \alpha\}$

4) Généralisation : Th de Sylow ($|G| = p^\alpha m$ avec $p \nmid m$)

Déf : p-sylow
- 1er th de Sylow

$\Rightarrow$ G contient un ssgpe d'ordre p^i pour tt $i \in \{0, \dots, \alpha\}$.
- 2ème th de Sylow

$\Rightarrow$ Un gpe d'ordre 63 n'est pas simple

$\Rightarrow$ Un gpe simple d'ordre 60 est iso à $\mathcal{A}_5$

$\Rightarrow$ Déterm les gpes d'ordre pq avec $p < q$ 1ers

II) Gpes abéliens finis

1) Gpes cycliques

- Un gpe cyclique d'ordre n est iso à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
- Si $d|n$, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ contient un unique ss-gpe d'ordre d. C'est le ssgpe $d\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ engendré par $\bar{d}$.
- $\bar{k}$ est d'ordre $\frac{n}{k\wedge n}$ donc $\bar{k}$ est un générateur de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ssi $k\wedge n = 1$ ce qui équiv à $\bar{k} \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$.
Ep, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ possède $\varphi(n)$ générateurs.
- Si $n = \prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i}$,

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \simeq \prod_{i=1}^{r} \mathbb{Z}/p_i^{\alpha_i}\mathbb{Z} \quad \text{et} \quad (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^* \simeq \prod_{i=1}^{r} (\mathbb{Z}/p_i^{\alpha_i}\mathbb{Z})^* .$$

Ep, $\varphi(n) = \prod_{i=1}^{r} \varphi(p_i^{\alpha_i}) = n \prod_{i=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$.

2) Exposant

Déf : exposant
- L'exp d'un gpe abélien fini divise l'ordre du gpe et est divisible par l'ordre de ts les élts du gpe

$\Rightarrow$ Un ssgpe fini du gpe mult d'un corps (comm) est cyclique.
Ep, $\mathbb{F}_q^* \simeq \mathbb{Z}/(q-1)\mathbb{Z}$ avec $q = p^n$.

3) Th de Structure.

- Si G est un gpe abélien fini, il existe un unique entier $\neq 0$ r et des uniques entiers ≥ 2 $q_1, \dots, q_r$ vérifiant $q_r | \dots | q_1$ tq $G \simeq \mathbb{Z}/q_1\mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}/q_r\mathbb{Z}$.

$\Rightarrow$ Soit G un gpe abélien d'ordre n.
Si $d|n$, G contient un ssgpe d'ordre d.

III) Ssgpes finis de $O^+(2)$ et $O^+(3)$

- Les ssgpes finis de $O^+(2)$ st les $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (dpts du plan laissant stables P_n ie rot du plan de centre O et d'angle $\frac{2k\pi}{n}$, $k \in \{0, \dots, n-1\}$)
- Les ssgpes finis de $O^+(3)$ st :
  les $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (rot de l'esp autour de Oz et d'angle $\frac{2k\pi}{n}$, $k \in \{0, \dots, n-1\}$)
  les D_n (rot ... et sym de l'esp autour de n dtes de xOy faisant entre elles un angle égal à $\frac{2\pi}{n}$)
  A_4 (dpts de l'esp laissant stable un tetraèdre rég)
  S_4 (" " " cube)
  A_5 (" " " icosaèdre)

ssgpes finis de $O_2(\mathbb{R})$.