105

Gpe des permutations d'un ens fini. Appl

I) Déf et 1ères propriétés

1) Gpe des permutations et gpe sym

Déf : gpe des perm d'un ens fini
gpe sym d'indice n

- Si $\mathrm{Card}(E) = n$, $\sigma(E) \simeq \sigma_n$
- $|\sigma_n| = n!$

2) Cycles

Déf : cycle
sa longueur
son support
transposition

Exple : La perm $\begin{pmatrix} 1&2&3&4&5 \\ 3&2&4&5&1 \end{pmatrix}$ est un cycle de long 4 et de supp $\{1,3,4,5\}$ noté $(1,3,4,5)$.

- Une perm non triviale se décomp de manière unique à l'ordre près en un prod de cycles de supp 2 à 2 disj.

$\Rightarrow$ σ_n est engendré par les transp

- Si $\sigma = (a_1, \dots, a_p)$ et $\tau \in \sigma_n$, $\tau \sigma \tau^{-1} = (\tau(a_1), \dots, \tau(a_p))$.

$\Rightarrow$ Les cycles d'ordre p st conj ds σ_n.

3) Signature et gpe alterné

- Si $\sigma \in \sigma_n$ s'écrit $\tau_1 \dots \tau_r = \tau'_1 \dots \tau'_s$ où les τ_i et τ'_i st des transp, r et s ont m̂ parité

Déf : signature

- ε est l'unique morph non trivial de $\mathfrak{S}_n$ ds $\{-1,1\}$.

Déf : gpe alterné d'indice n

- A_n est le seul ssgpe d'indice 2 de $\mathfrak{S}_n$.
- $1 \to A_n \to \mathfrak{S}_n \xrightarrow{\varepsilon} \{-1,1\} \to 1$ est une suite exacte scindée.

$\Rightarrow \mathfrak{S}_n \simeq A_n \rtimes \{-1,1\}$

- A_n est $(n-2)$ fois transitif.

$\to$ Les cycles d'ordre 3 st conj ds A_n pour $n \geq 5$

$\Rightarrow$ Soit H un ssgpe de $\mathfrak{S}_p$ avec $p \geq 5$ 1er.
Si $[\mathfrak{S}_p : H] \leq p-1$, $[\mathfrak{S}_p : H] \in \{1,2\}$.
Ep, $\mathfrak{S}_5$ ne possède pas de ssgpe d'ordre 30 ou 40.

II) Structure

1) Générateurs

- $\mathfrak{S}_n$ est engendré par $(1,2), (1,3), \dots, (1,n)$
$(1,2), (2,3), \dots, (n-1,n)$
$(1,2), (1,2,\dots,n)$
- A_n est engendré par les cycles d'ordre 3 pour $n \geq 3$

2) Centre et gpe dérivé

- $Z(\mathfrak{S}_n) = \{1\}$ pour $n \geq 3$

$\Rightarrow \mathfrak{S}_n \simeq \mathrm{Int}(\mathfrak{S}_n)$ pour $n \geq 3$

- $D(\mathfrak{S}_n) = A_n$ pour $n \geq 3$
- $D(A_n) = A_n$ pour $n \geq 5$

3) Simplicité

• A_n est simple pour $n \geq 5$
$\Rightarrow$ Les ssgpes dist de $\mathfrak{S}_n$ st $\{1\}$, A_n et $\mathfrak{S}_n$ pour $n \geq 5$
$\Rightarrow$ Si H est un ssgpe d'indice n de $\mathfrak{S}_n$, $H \simeq \mathfrak{S}_{n-1}$.

III) Appl

1) Symétrisation

Déf : polyn sym
• Symétrisation d'un monôme
Exple : Les polyn sym élém de $A[X_1, \dots, X_n]$ st les symétrisés de $X_1, X_1X_2, \dots, X_1 \dots X_n$ ie $\sum_{i=1}^{n} X_i, \sum_{1 \leq i < j \leq n} X_iX_j, \dots, X_1 \dots X_n$.

2) Antisymétrisation

Déf : forme n-lin antisym
• Antisymétrisation d'une forme n-lin
Exple : Soit E un ev de dim n et $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Alors, l'appl déf par $\varphi(x_1, \dots, x_n) = e_1^*(x_1) \dots e_n^*(x_n)$ pour tt $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$ est une forme n-lin dt l'antisymétrisé est le dét ds $(e_1, \dots, e_n)$.

3) Action de gpe

Déf : action de gpe
• $PGL(2, \mathbb{F}_q) \hookrightarrow \mathfrak{S}(\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q)) \simeq \mathfrak{S}_{q+1}$.
$\Rightarrow$ Iso autour de $GL(2, \mathbb{F}_q)$.

4) Ssgpes finis de $O^+(3)$