111

Exples d'appl des idéaux d'un anneau comm unit.

I) Anneaux quotients

1) Déf et 1ères propriétés

- Les rel d'équiv compatibles avec la structure d'anneau st de la forme $x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x-y \in I$ où I est un idéal.
Ds ce cas, $A/\mathcal{R}$ est un anneau noté A/I
- Th d'iso
- Idéaux d'un anneau quotient.

2) Intégrité et idéaux 1ers.

Déf : idéal 1er
Exple : Les idéaux 1ers de $\mathbb{Z}$ st $\{0\}$ et les $p\mathbb{Z}$ avec p 1er.
- A/I est intègre ssi I est 1er.

$\Rightarrow$ La caract d'un corps est 0 ou un nbre 1er.

3) Corps et idéaux max

Déf : idéal max
Exple : Les idéaux max de $\mathbb{Z}$ st les $p\mathbb{Z}$ avec p 1er
- A/I est un corps ssi I est max

$\Rightarrow$ un idéal max est 1er.

II) Anneaux principaux et anneaux noethériens

Déf : idéal principal

anneau principal

Exples : $\mathbb{Z}$ est principal

Les corps st principaux

- $k[X]$ est principal ssi k est un corps

Déf : idéal de type fini

- Les asse :

(i) tt idéal de A est de type fini

(ii) tte suite $\uparrow$ d'idéaux de A est stationnaire

(iii) tt ens $\neq \emptyset$ d'idéaux de A a un élt max

Ds ce cas, A est noethérien

Exples : les anneaux principaux st noethériens

- Th de Hilbert

$\Rightarrow \mathbb{Z}[X]$ est noethérien.

III) Arithmétique

1) Divisibilité (A est intègre)

- $a \in A^* \Leftrightarrow (a) = A$
- $b \mid a \Leftrightarrow (a) \subset (b)$
- $a \mathcal{R} b \Leftrightarrow a \mid b$ et $b \mid a$

$\Leftrightarrow (a) = (b)$

$\Leftrightarrow \exists u \in A^*, a = bu$

déf une rel d'équiv

- $a \mapsto (a)$ induit un iso d'ens ordonnés de $A/\mathcal{R}$ muni de la divisibilité ds $\mathcal{I}(A) = \{$idéaux princ. de $A\}$ muni de $\subset$ inv.

$\Rightarrow$ Si A n'est pas un corps,

p est irréd $\Leftrightarrow (p)$ est max ds $\mathcal{I}(A) \setminus A$.

$\Rightarrow$ Les idéaux 1ers d'un anneau principal qui n'est pas un corps st $\{0\}$ et les idéaux max. Ces derniers étant engendrés par les irréd.

2) Ds un anneau factoriel

Déf : anneau fact

Exples : $\mathbb{Z}$ et $k[X]$ (k corps) st fact

- Ds un anneau intègre et noethérien, tt élt $\neq 0$ se décomp en un prod d'irréd
- Ds un anneau intègre où tt élt $\neq 0$ se décomp en un prod d'irréd, les asse :

(i) la décomp est unique à perm et inv près

(ii) lemme d'Euclide

(iii) p est irréd $\Leftrightarrow$ (p) est 1er $(p \neq 0)$

(iv) th de Gauss

$\Rightarrow$ Un anneau principal est fact

$\Rightarrow$ Si A est fact, $A[X]$ l'est aussi

$\Rightarrow$ Critère d'Eisenstein

- $A/_{\mathcal{R}}$ et $\mathcal{I}(A)$ st réticulés.

On pose alors $c = \text{ppcm}(a,b)$ si $(c) = \inf((a),(b))$
et $d = \text{pgcd}(a,b)$ si $(d) = \sup((a),(b))$

- $(a) \cap (b) = (\text{ppcm}(a,b))$ et $(a)+(b) \subset (\text{pgcd}(a,b))$

3) Ds un anneau principal

- Th de Bezout

$\rightarrow$ a et b st 1ers entre eux $\Leftrightarrow (a)+(b) = (1)$

$\Leftrightarrow \exists \lambda, \mu \in A$ tq $\lambda a + \mu b = 1$.