Alg des polyn à n ind ($n \geq 2$). Polyn. symétiques . Appl

A est un anneau comm (unitaire)

I) Polyn à n ind

1) Constuction de l'alg $A[X_1, \dots, X_n]$

Déf : polyn à n ind à coeff ds A

Not : $P = (a_i)_{i \in \mathbb{N}^n} = \sum_{i \in \mathbb{N}^n} a_i X^{i_1} \dots X^{i_n}$

$A[X_1, \dots, X_n]$

• Muni de $(a_i) + (b_i) = (a_i + b_i)$

$(a_i)(b_j) = (\sum_{i+j=k} a_i b_j)$

$\lambda (a_i) = (\lambda a_i)$

$A[X_1, \dots, X_n]$ est une A. algèbre

2) Polyn homogènes

Déf : deg d'un monôme

deg d'un polyn

polyn s. homogène

• Si $P \in A[X_1, \dots, X_n]$ est de deg m, il s'écut de façon unique ss la forme $P_0 + \dots + P_m$ avec P_s, soit nul, soit s. homogène et $P_m \neq 0$.

→ Si $P, Q \in A[X_1, \dots, X_n] \setminus \{0\}$, $\deg PQ \leq \deg P + \deg Q$

• L'ens des polyn s. hom de $\mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ est un $\mathbb{R}$-ev de dim $D_{n,s} = C_{s+n-1}^{n-1}$ et $\sum_{s \geq 0} D_{n,s} z^s$ est de rayon de cvgce 1 et de somme $z \mapsto \left(\frac{1}{1-z}\right)^n$.

3) Propriétés de $A[X_1, \dots, X_n]$

- $A[X_1,\dots,X_n]$ s'identifie à $A[X_1,\dots,X_{n-1}][X_n]$

→ Si A est intègre, $A[X_1,\dots,X_n]$ l'est aussi

→ Si A est fact, $A[X_1,\dots,X_n]$ l'est aussi

→ Si A est noeth, $A[X_1,\dots,X_n]$ l'est aussi

4) <u>Racines</u>

- Soit A un anneau intègre et ∞ et $P \in A[X_1,\dots,X_n]$.
Si $P(x_1,\dots,x_n) = 0$ pour $\forall (x_1,\dots,x_n) A^n$, $P = 0$

→ Si A est intègre et ∞, $A[X_1,\dots,X_n]$ s'identifie aux fcts polyn de A^n ds A.

⇒ Soit k un corps ∞ et L une ext de k.
Si $A, B \in M_n(k)$ st semblables sur L, elles le st sur k

II) <u>Polyn symétriques</u>

1) <u>Polyn sym élém</u>

<u>Déf</u> : polyn sym
symétrisé d'un monôme
polyn sym élém

- Rel coeff. racines
- Formules de Newton

⇒ Caract les polyn scindés à racines simples de $\mathbb{R}[X]$

2) <u>Description des polyn sym</u>

- Soit $P \in A[X_1,\dots,X_n]$ sym.
Alors, il existe un unique $Q \in A[X_1,\dots,X_n]$ tq $P = Q(\Sigma_1,\dots,\Sigma_n)$

Exple : Ds $\mathbb{R}[X_1,\dots,X_5]$, $\Sigma X_1^2 X_2^2 X_3 = \Sigma_2\Sigma_3 - 3\Sigma_1\Sigma_4 + 5\Sigma_5$

$\Rightarrow$ Th de Kronecker

$\Rightarrow$ Th de D'Alembert Gauss