M9

Racines des polyn à une ind. Rel coeff. racines. Exples et appl

I) Racines

1) 1ères propriétés ($P \in k[X]$ avec k un corps)

Déf : racine

- $a \in k$ est racine de P ssi $(X-a) | P$

Déf : ordre d'une racine

- Si $a_1, \dots, a_r \in k$ st des racines d'ordre $h_1, \dots, h_r$, il existe $Q \in k[X]$ tq $P = (X-a_1)^{h_1} \dots (X-a_r)^{h_r} Q$ et $Q(a_i) \neq 0$

→ Si P est non nul et de deg n, il a au plus n rac

⇒ Unicité des polyn interp de Lagrange

⇒ Un ssgpe $< \infty$ du gpe mult d'un corps comm est cyclique

⇒ Caract des carrés de $\mathbb{F}_q$

⇒ Si k est ∞, $k[X]$ s'identifie aux fcts polyn de k ds k

Déf : polyn dérivé

- Si k est de caract 0, $a \in k$ est racine d'ordre h de P ssi $P(a) = \dots = P^{(h-1)}(a) = 0$ et $P^{(h)}(a) \neq 0$.

2) Corps de rupture et de décomp

Pb : Soit $P \in k[X]$ irréd ds $k[X]$ de deg > 1
Existe-t-il une ext de k où P admette une racine ?

Déf : corps de rupture

- $\exists$ corps de rupture de P sur k unique à iso près

Exples : 1) $\mathbb{C} = \mathbb{R}(i) \simeq \mathbb{R}[X]/(X^2+1)$ est le corps de rupture de X^2+1 sur $\mathbb{R}$

2) $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) \simeq \mathbb{Q}[X]/(X^3-2)$ est le corps de rupt de X^3-2 sur $\mathbb{Q}$.

X^3-2 n'est pas scindé sur $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$

Pb : Soit $P \in k[X]$.
Existe-t-il une ext de k où P se décompose en produit de polyn de deg 1 ?

Déf : corps de décomp

- $\exists$ corps de décomp de P sur k unique à iso près.

Exples : 1) $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, j)$ est le corps de décomp de $X^3 - 2$ sur $\mathbb{Q}$
2) $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, i)$ est le corps de décomp de $X^4 - 2$ sur $\mathbb{Q}$

$\Rightarrow$ Th de D'Alembert Gauss

3) Racines de l'unité ds $\mathbb{C}$

Déf : racine n-ième de l'unité

Not : U_n

- $U_n = \{e^{2ik\pi/n}, k \in [\![0, n-1]\!]\}$ est cyclique d'ordre n

Déf : racine prim n-ième de l'unité

Not : Π_n

- $\Pi_n = \{e^{2ik\pi/n}, k \in [\![0, n-1]\!]$ et $k \wedge n = 1\}$ est de card $\varphi(n)$

Déf : n-ième polyn cyclotomique Φ_n

- $X^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d$

$\Rightarrow$ $n = \sum_{d|n} \varphi(d)$

$\Rightarrow$ $\Phi_n \in \mathbb{Z}[X]$

$\Rightarrow$ Th de Wedderburn

- Φ_n est irréd ds $\mathbb{Z}[X]$.

II) Rel coeff-racines

1) Rel algébriques

- Rel coeff-racines

$\Rightarrow$ Th de Kronecker

- Formules de Newton

$\Rightarrow$ Caract les polyn scindés à rac simples de $\mathbb{R}[X]$

2) Rég des racines (complexes)

- Les racines st des fcts cont des coeff.
- les racines simples st des fcts C^∞ des coeff

3) localisation des racines

- Si $P = a_n X^n + \dots + a_0 \in \mathbb{Z}[X]$, les racines rationnelles de P st contenues ds $\{ \frac{p}{q} \in \mathbb{Q},\ p \wedge q = 1,\ p \mid a_0 \text{ et } q \mid a_n \}$
- Soit $P = X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_0 \in \mathbb{C}[X]$ et ρ le + gd des mod des racines de P.
  Alors $\rho \leq \sup \{ 1, \sum_{i=1}^{n} |a_i| \}$
- Th de Gauss Lucas

$\Rightarrow$?