Dim d'un ev (cas de la dim finie). Rang. Exples et appl.

I) Théorie de la dim

1) Dim d'un ev

Déf: ev de dim $< \infty$

- Soit E un ev de dim $< \infty$.
  Si $\mathcal{G}$ est une famille génératrice finie et $\mathcal{L} \subset \mathcal{G}$ une famille libre, il existe une base $\mathcal{B}$ tq $\mathcal{L} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{G}$.

→ Un ev de dim $< \infty$ admet une base

→ Ds un ev de dim $< \infty$,
  (i) on peut compléter une famille libre en une base
  (ii) on peut extraire une base d'une famille génératrice.

- Ds un ev de dim $< \infty$, ttes les bases ont le m̂ card

Déf: dim d'un ev (de dim $< \infty$)

Exples: $\dim E \times F = \dim E + \dim F$
$\dim L(E,F) = \dim E \times \dim F$
$\dim \{\text{polyn } n\text{-hom à } d \text{ var}\} = C_{n+p-1}^{p-1}$.

- Ds un ev de dim n,
  (i) une famille libre a au + n élts et c'est une base si elle en a n.
  (ii) une famille génératrice a au − n élts et c'est une base si elle en a n.

→ Th de Carathéodory.

⇒ Soit E un ev de dim $< \infty$.
Si F est un sev de E, F est de dim $< \infty$ et $\dim F \leq \dim E$. De plus, $F = E$ ssi $\dim F = \dim E$

2) Codim d'un sev

Déf : sev de codim $< \infty$
sa codim

- Soit E un ev et F un sev de E.
Alors, F est de codim $< \infty$ ssi il admet un supplémentaire S de dim $< \infty$.
Ds ce cas, $\operatorname{codim} F = \dim S$.
⇒ Soit E un ev de dim $< \infty$.
Si F est un sev de E, F est de codim $< \infty$ et $\operatorname{codim} F = \dim E - \dim F$.

II) Rang

1) d'une appl lin

Déf : appl lin de rg fini
son rg

- Th du rg
⇒ Soit $f \in L(E,F)$ avec $\dim E = \dim F$.
Alors, f est bij $\Leftrightarrow$ f est surj
$\Leftrightarrow$ f est inj
⇒ Existence des polyn interp de Lagrange
⇒ Si $\dim E < \infty$, E et E^{**} st canoniqt iso.
⇒ Soit $f : X \to X$ aff avec $\dim X < \infty$.
Si $\overrightarrow{X}(1, \vec{f}) = \{0\}$, f a un unique pt fixe.
⇒ Soit E un ev et F, G 2 sev de E de codim $< \infty$.
Si $F \subset G$ et $\operatorname{codim} F = \operatorname{codim} G$, $F = G$.

$\Rightarrow$ Soit $E_0 \xrightarrow{f_0} E_1 \rightarrow \dots \xrightarrow{f_{n-1}} E_n$ une suite exacte avec $\dim E_i < \infty$.
Alors, $\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \dim E_i = 0$.

$\Rightarrow$ Soit E un ev de dim $< \infty$ et F, G 2 sev de E.
Alors, $\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim F \cap G$.
$\Rightarrow$ Soit E un ev et F, G 2 sev de E de codim $< \infty$.
Alors, $\mathrm{codim}(F+G) = \mathrm{codim} F + \mathrm{codim} G - \mathrm{codim} F \cap G$.

2) d'une matrice

Déf : rg d'une mat
• Si $A \in M_{p,q}(k)$ est de rg r, $A \sim \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ Soit $A \in M_{p,q}(k)$ et $B \in M_{q,p}(k)$.
Alors, $(-X)^q \chi_{AB} = (-X)^p \chi_{BA}$.
Ep, $\chi_{AB} = \chi_{BA}$ dès que $p = q$
• Le rg d'une mat est le + gd des ordres de ses mat carrées inv extraites
$\Rightarrow$ Soit $n \geq 2$ et $1 \leq p \leq n-1$.
Alors, $\{A \in M_n(\mathbb{R}), \mathrm{rg} A = p\}$ est dense ds $\{A \in M_n(\mathbb{R}), \mathrm{rg} A \leq p\}$
$\Rightarrow$ le rg d'une mat ne dépend pas du corps de base
$\Rightarrow$ le rg d'une mat est égale à celui de sa transp.
$\Rightarrow$ Caract locale des immersions et des submersions

III) Extensions de corps de deg $< \infty$

• Multiplicativité des deg
• Soit $k \subset L$ des corps et $\alpha \in L$. Alors, les asse :
(i) α est alg sur k
(ii) $k[\alpha] = k(\alpha)$
(iii) $[k(\alpha) : k] < \infty$.
Ds ce cas, si P est le polyn min de α sur k, $[k(\alpha):k] = \deg P$

$\Rightarrow$ Soit $k \subset L$ des corps.

Alors, {élts de L alg sur k} est un sscorps de L.

- Pour qu'un réel x soit constructible, il faut que x soit alg sur $\mathbb{Q}$ et que $[\mathbb{Q}(x) : \mathbb{Q}]$ soit une puiss de 2

$\Rightarrow$ $\sqrt[3]{2}$ n'est pas const ie la duplic du cube est imp.

$\Rightarrow$ $\sqrt{\pi}$ n'est pas const ie la quad du cercle est imp.