122

Mat équiv - Mat semblables
Appl

I) Mat équiv

1) Pb de classif

- $GL_p(k) \times GL_q(k)$ opère sur $M_{p,q}(k)$ par $(P,Q).M = PMQ^{-1}$

Déf : mat équiv

Quest : Peut-on classifier les orbites ?

2) Un résultat positif

- Si $A \in M_{p,q}(k)$ est de rg r, $A \sim \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

→ 2 mat st équiv ssi elles ont le m̂ rg.

3) Appl

- Soit $A \in M_{p,q}(k)$ et $B \in M_{q,p}(k)$.
  Alors, $(-X)^q \chi_{AB} = (-X)^p \chi_{BA}$.
  Ep, $\chi_{AB} = \chi_{BA}$ dès que $p = q$
- ($GL_n(\mathbb{R})$ est dense ds $M_n(\mathbb{R})$)
- Soit $n \geq 2$ et $1 \leq p \leq n-1$.
  Alors, $\{A \in M_n(\mathbb{R}), \text{rg} A = p\}$ est dense ds $\{A \in M_n(\mathbb{R}), \text{rg} A \leq p\}$
- Un hyperplan de $M_n(\mathbb{R})$ contient une mat inv.

II) Mat semblables

1) Pb de classif

- $GL_n(k)$ opère sur $M_n(k)$ par $P.M = PMP^{-1}$

Déf : mat semblables

Quest : Peut-on classifier les orbites ?

2) Un résultat positif

- Si $M \in M_n(k)$, il existe un unique entier $r \neq 0$ et une unique famille de polyn unit $Q_1, \dots, Q_r$ soumise à la cond $Q_r | \dots | Q_1$ tq M soit semblable à $\begin{pmatrix} C(Q_1) & 0 \\ 0 & C(Q_r) \end{pmatrix}$. De plus, $\Pi_M = Q_1$ et $\chi_M = (-1)^n Q_1 \dots Q_r$

les Q_i st les inv de sim de M.

$\rightarrow$ 2 mat st semblables ssi elles ont les m̂ inv de sim.

3) Appl

- Réd de Jordan
- Si $k \subset L$, 2 mat de $M_n(k)$ semblables sur L le st sur k
- $\Gamma_f = \{P(f), P \in k[X]\}$ ssi f est cyclique

4) Cas des mat sym et orthog

- Réd des mat sym

$\Rightarrow$ Décomp polaire

$\Rightarrow$ Si $A \in M_n(\mathbb{R})$, $\|A\|_2 = \sqrt{\rho({}^tAA)}$

- Réd des mat orthog

$\Rightarrow$ $SO_n(\mathbb{R})$ est connexe

$\Rightarrow$ Classif des isométries du plan et de l'espace.

+ équivalence des mat à coeff ds un anneau
et lien avec les inv de sim.