123

Op élém sur les lignes et les colonnes d'une mat. Résol d'un syst d'éq lin. Exples et appl.

I) Op élém

Déf : $L_i \to L_i + \lambda L_j$
$B_{ij}(\lambda)$

- $B_{ij}(\lambda) \in SL_n(k)$ et $B_{ij}(\lambda)^{-1} = B_{ij}(-\lambda)$.
- $B_{ij}(\lambda) A$ se déduit de A par $L_i \to L_i + \lambda L_j$

Déf : $L_i \to \alpha L_i$
$D_i(\alpha)$

- $D_i(\alpha) \in GL_n(k)$ et $D_i(\alpha)^{-1} = D_i(1/\alpha)$
- $D_i(\alpha) A$ se déduit de A par $L_i \to \alpha L_i$

Déf : $L_i \leftrightarrow L_j$
M_σ

- $M_\sigma \in GL_n(k)$ et $M_\sigma^{-1} = M_{\sigma^{-1}}$
- $M_{(i,j)} A$ se déduit de A par $L_i \leftrightarrow L_j$

- Soit $A \in M_{n,p}(k)$.
Si la 1ère colonne de A est non nulle, il existe des mat de transv $M_1, \dots, M_s$ tq
$M_1 \dots M_s A = \begin{pmatrix} 1 & \times \cdots \times \\ 0 & \\ \vdots & A_1 \\ 0 & \end{pmatrix}$ avec $\begin{cases} A_1 \in M_{n-1,p-1}(k) \\ rg(A) = 1 + rg(A_1) \end{cases}$

II) Appl

1) aux mat inversibles

- Si $A \in GL_n(k)$, il existe un prod S de mat de transv tq $SA = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & \det A \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ $Sl_n(k)$ est eng par les transv

$\Rightarrow$ $Sl_n(\mathbb{C})$ et $Sl_n(\mathbb{R})$ st connexes par arcs.

$\Rightarrow$ $Gl_n(k)$ est eng par les transv et les dil.

$\Rightarrow$ $Gl_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs et $Gl_n(\mathbb{R})$ a 2 comp connexes par arcs homeo : $Gl_n^+(\mathbb{R})$ et $Gl_n^-(\mathbb{R})$.

$\Rightarrow$ Méthode pour calculer A^{-1}.

Exple : $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

2) autour du rg

- Deux mat qui se déduisent l'une de l'autre par une suite d'op élém ont $\hat{m}$ rg

Exple : $\mathrm{Rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -6 & 5 & 3 \\ -3 & -4 & 9 & -6 & -4 \\ 1 & 3 & -3 & 1 & 3 \end{pmatrix} = 3$.

- Si $A \in M_{n,p}(k)$ est de rg r, il existe des prod $P \in Gl_n(k)$ et $Q \in Gl_p(k)$ de mat de transv, dil et perm tq $PAQ = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Ep, une mat de rg r est équiv à $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ Soit $A \in M_{p,q}(k)$ et $B \in M_{q,p}(k)$.
Alors, $(-X)^q \chi_{AB} = (-X)^p \chi_{BA}$.
Ep, $\chi_{AB} = \chi_{BA}$ dès que $p = q$

$\Rightarrow$ Soit $n \geq 2$ et $1 \leq p \leq n-1$.
Alors, $\{A \in M_n(\mathbb{R}), \mathrm{rg}\, A = p\}$ est dense ds $\{A \in M_n(\mathbb{R}), \mathrm{rg}\, A \leq p\}$

III) Résolution de $AX = b$.