Déterminants. Exples et appl

I) Déf et 1ères propriétés

1) Dét d'une famille de vect (E est un ev de dim n)

- $A_n(E)$ est un ev de dim 1.
De plus, il existe une unique forme n-lin alt valant 1 sur une base donnée.
Déf : $\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)$
- Soit $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux bases de E.
Alors, $\det_{\mathcal{B}'}(x_1, \dots, x_n) = \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)$
→ Soit $\mathcal{B}$ une base de E.
Alors, $(x_1, \dots, x_n)$ est une base de E ssi $\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) \neq 0$.

2) Dét d'un end (E est un ev de dim n)

- Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.
Alors, $\det_{\mathcal{B}}(u(e_1), \dots, u(e_n))$ ne dépend pas de $\mathcal{B}$
Déf : $\det u$

3) Dét d'une mat ($A \in M_n(k)$)

Déf : $\det A$
- $\det {}^tA = \det A$
- (i) $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$
(ii) on ne change pas la val du dét en ajoutant à une colonne une cl des autres
(iii) on mult par $\varepsilon(\sigma)$ la val du dét en effectuant une perm σ sur les colonnes

• $\det AB = \det A \det B$

Déf : cofacteur de a_{ij}

• Dvt selon une rangée

$\Rightarrow \det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} = \det A \det D$.

• $A\tilde{A} = \tilde{A}A = (\det A) I$

$\Rightarrow$ A est inv ssi $\det A \neq 0$.

Ds ce cas, $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$

4) Exples

• det de Vandermonde
• det de Cauchy
• det circulant

II) Appl

1) En algèbre

• Le rg d'une mat est le + gd des ordres de ses dét $\neq 0$ extraits

$\Rightarrow$ Soit $n \geq 2$ et $1 \leq p \leq n-1$. Alors, $\{A \in M_n(\mathbb{R}), \text{rg } A = p\}$ est dense ds $\{A \in M_n(\mathbb{R}), \text{rg } A \leq p\}$

$\Rightarrow$ le rg d'une mat ne dépend pas du corps de base

$\Rightarrow$ le rg d'une mat est égal à celui de sa transp

$\Rightarrow$ Caract locale des immersions et des subm.

• $\chi_{C(P)} = (-1)^n P$ avec P unit de deg n.

$\Rightarrow$ Th de Cayley Hamilton

• Caract des mat pos (resp déf pos)

$\Rightarrow$ Règles de Monge

• Formules de Cramer

$\Rightarrow$ Th d'Auerbach.

2) En analyse

- Th du chgt de var
  $\Longrightarrow$ lemme de non rétraction C^1
- Th de Müntz

3) En géométrie

- Orientation d'un ev de dim finie
- Produit mixte ds un esp euclidien orienté
- Produit vectoriel " " "