125

Réd d'un end en dim < ∞. Appl

E est un $\mathbb{K}$.ev de dim $n \in \mathbb{N}^*$ et $u \in \mathcal{L}(E)$.

I) Trigonalisation et diagonalisation

1) Trigonalisation

Déf : end trigonalisable
- u est trigo ssi χ_u est scindé sur $\mathbb{K}$

⇒ Soit F un sev stable par u.
Si u est trigo, $u_{|F}$ l'est aussi

⇒ Un end nilpotent est trigo

⇒ Th de Cayley

2) Diagonalisation

Déf : end diagonalisable
- Si u admet n vp ≠ 2 à 2, u est diago

⇒ {mat diago de $M_n(\mathbb{C})$} est dense ds $M_n(\mathbb{C})$
- u est diago ssi il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ scindé à racines simples tq $P(u) = 0$

⇒ Soit F un sev stable par u.
Si u est diago, $u_{|F}$ l'est aussi

3) Réductions simultanées

- Soit $v \in \mathcal{L}(E)$.
Si u et v st trigo (resp diago) et commutent, ils st cotrigo (resp codiago)

II) Réd classiques

- Décomp de Dunford

$\Rightarrow$ $Exp : M_n(\mathbb{C}) \to GL_n(\mathbb{C})$ est surj et
$Exp^{-1}(\{I\}) = \{$mat diago de $M_n(\mathbb{C})$ dt les vp st ds $2i\pi\mathbb{Z}\}$

- Réd de Jordan

$\Rightarrow$ Si $k = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $A \in M_n(k)$ est semblable à ${}^tA$

- Réd de Frobenius

$\Rightarrow$ Si $k \subset L$, 2 mat de $M_n(k)$ semblables sur L le st sur k.
$\Rightarrow$ $\Gamma_f = \{P(f), P \in k[X]\}$ ssi f est cyclique

III) Qd E est euclidien

- Réd d'un end sym

$\Rightarrow$ Décomp polaire
$\Rightarrow$ Si $A \in M_n(\mathbb{R})$, $\|A\|_2 = \sqrt{\rho({}^tAA)}$

- Réd d'une isométrie

$\Rightarrow$ $SO_n(\mathbb{R})$ est connexe
$\Rightarrow$ Classif des isométries du plan et de l'esp.