Ss esp stables d'un end d'un ev de dim < ∞. Appl

E est un k.ev de dim $<\infty$ et $u \in \mathcal{L}(E)$

I) Déf et 1ères propriétés

Déf : sev stable

Exples : 1) Si $P \in k[X]$, $\operatorname{Im} P(u)$ et $\ker P(u)$ st stables par u.
Ep, les ss esp propres et caract de u st stables par u.
2) Si $P \in k[X]$, F est stable par $P(u)$ dès que F est stable par u.

- Soit F un sev stable par u. Alors,
  1) $u_{|F} \in \mathcal{L}(F)$
  2) $\chi_{u_{|F}} \mid \chi_u$
  3) $\pi_{u_{|F}} \mid \pi_u$
- Soit $v \in \mathcal{L}(E)$.
  Si u et v commutent, tt ss esp propre de u est stable par v

⇒ Unicité de la racine carrée d'une mat herm pos.

II) Orthogonal d'un sev stable

1) Ds un ev de dim < ∞

- Soit F un sev de E.
  Alors, F est stable par u ssi $F^\perp$ est stable par ${}^t u$

⇒ u est trigo ssi χ_u est scindé sur k

⇒ Soit $v \in \mathcal{L}(E)$.
Si u et v st trigo et commutent, ils st cotrigo

2) Ds un esp euclidien (E est euclidien)

- Soit F un sev de E et u symétrique.
Alors, F est stable par u ssi $F^{\perp}$ est stable par u
$\Rightarrow$ Réd d'un end sym.

III) Décomp en sev stables

1) Décomp des noyaux

$\Rightarrow$ u est diago ssi il existe $P \in k[X]$ scindé à racines simples tq $P(u) = 0$
$\Rightarrow$ Décomp de Dunford
$\Rightarrow$ Réd de Jordan
$\Rightarrow$ Soit P_x le polyn unit qui engendre l'idéal $\{P \in k[X], P(u)(x) = 0\}$.
Alors, il existe $x \in E$ tq $\Pi_u = P_x$

2) Décomp en ss. esp u. monogènes

Déf : sev u. monogène
- Il existe une suite $F_1, \dots, F_r$ de ss. esp u. monogènes tq 1) $E = F_1 \oplus \dots \oplus F_r$
2) $\forall i \in \{1, \dots, r\}, P_{i+1} \mid P_i$ où $P_i = \Pi_{u|F_i}$.

De plus, la suite $P_1, \dots, P_r$ ne dépend que de u et est appelée suite des inv de sim de u.
$\Rightarrow$ Réd de Frobenius
$\Rightarrow$ $\Gamma_u = \{P(u), P \in k[X]\}$ ssi E est u. monogène.

3) End semi. simples

Déf : end semi-simple

- Si Π_u est irréd, u est semi-simple
- u est semi-simple ssi Π_u est sans fact carré

$\Rightarrow$ Si k est alg^t clos, u est semi-simple ssi u est diago

$\Rightarrow$ $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ est semi-simple ssi u a pour mat ds une certaine base $\begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ où D est diagonale et B constitué de blocs $\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$ centrés sur la diagonale.