132

Formes quad sur un ev de dim $<\infty$. Appl

E est un $\mathbb{K}$.ev de dim $<\infty$ avec car$(\mathbb{K}) \neq 2$

I) Orthogonalité et isotropie

1) Déf et 1ères propriétés

Déf : fq

- Si q est une fq sur E, il existe une unique fbs φ tq $q(x) = \varphi(x,x)$ pour tt $x \in E$. φ est alors la fp de q et on a : $\forall x,y \in E$, $\varphi(x,y) = \frac{1}{2}[q(x+y) - q(x) - q(y)]$

Dorénavant, q est une fq de fp φ.

Déf : mat
rg
cône isotrope
élt isotrope
fq déf
élts orthogonaux
orthogonal d'une partie
noyau
fq non dég

- $\ker q \subset C_q$. Ep, si q est déf, q est non dég
- Soit $\mathcal{B}$ une base de E.
Si A est la mat de q ds $\mathcal{B}$, $\ker q = \ker A$.
- Soit F un sev de E. Alors,
1) $\dim F + \dim F^\perp = \dim E + \dim(F \cap \ker q)$
2) $F^{\perp\perp} = F + \ker q$

2) Bases orthogonales

Déf : base orthog

- E admet une base orthog

$\Rightarrow$ Soit F un sev de E.
Si q est déf, $E = F \oplus F^{\perp}$ et $F^{\perp\perp} = F$

- Méthode de Gauss

II) Classif des fq

1) $k = \mathbb{C}$

- Si q est de rg r, il existe une base de E ds laquelle $q(x) = \sum_{i=1}^{r} x_i^2$.

Ep, 2 fq st équiv ssi elles ont le m̂ rg.

2) $k = \mathbb{R}$

- Si q est de rg r, il existe une base de E ds laquelle $q(x) = \sum_{i=1}^{s} x_i^2 - \sum_{i=s+1}^{r} x_i^2$.

De plus, s ne dépend pas d'une telle base et $(s, r-s)$ est apelé la sign de q.
Ep, 2 fq st équiv ssi elles ont la m̂ sign.
$\Rightarrow$ Classif des coniques proj réelles
$\Rightarrow$ Si q est de sign (s,t), son indice est égal au $\min(s,t)$

3) $k = \mathbb{F}_q$

- Soit $\alpha \in \mathbb{F}_q^* \setminus \mathbb{F}_q^2$.

Si q est de rg r, il existe une base de E ds laquelle $q(x) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{r} x_i^2 & \text{si } \det q \in \mathbb{F}_q^2 \\ \sum_{i=1}^{r-1} x_i^2 + \alpha x_r^2 & \text{si } \det q \notin \mathbb{F}_q^2 \end{cases}$

Ep, 2 fq st équiv ssi elles ont le m̂ rg et le m̂ discrim.

III) Fq positives ($k = \mathbb{R}$)

Déf : fq pos (resp nég)

- Si q est déf, q est soit pos, soit nég
- Inég de CS

→ Si q est pos, $\ker q = C_q$ donc elle est déf ssi elle est non dég.

→ Inég de Minkowsky

⇒ Si q est pos (resp déf pos), $x \mapsto \sqrt{q(x)}$ est une semi-norme (resp norme)

- Soit q, q' 2 fq.

Si q est déf pos, il existe une base orthonormale pour q et orthogonale pour q'

⇒ Classif des coniques réelles propres.