134

End remarquables d'un ev euclidien de dim < ∞

$(E, \langle , \rangle)$ est un ev euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$.

I) End symétriques

1) Déf et caract

Déf : end sym

- u est sym ssi sa mat ds une BON est sym

2) Réd

⟹ 2 end sym qui commutent st diago ds une m̂ BON

⟶ Si $M \in M_n(\mathbb{R})$ est sym, il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ tq $P^{-1}MP = {}^tPMP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ avec $\lambda_i \in \mathbb{R}$.

⟹ Décomp polaire

⟹ Si $A \in M_n(\mathbb{R})$, $\|A\|_2 = \sqrt{\rho({}^tAA)}$

⟶ Si q est une fq sur E, il existe une BON de E orthogonale pour q

⟹ Classif des coniques réelles propres

II) Isométries

1) Déf et caract

Déf : isométrie

- Si u est une isométrie, u est bij et $u^{-1} = u^*$

• u est une isométrie ssi sa mat ds une BON est orthog
ssi elle conserve $\langle , \rangle$
ssi elle envoie une BON sur une BON.

2) Réd

→ Si $M \in O_n(\mathbb{R})$, il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ tq
$$P^{-1}MP = {}^tPMP = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & \varepsilon_r & & & \\ & & & R_{\theta_1} & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & R_{\theta_s} \end{pmatrix}$$
⇒ $SO_n(\mathbb{R})$ est connexe
⇒ Classif des isométries du plan et de l'esp

III) End normaux

1) Déf et caract

Déf : end normal
Exples : les end sym, antisym et les isométries st normaux
• u est normal ssi sa mat ds une BON est normale

2) Réd

⇒ Réd d'un end antisym
→ Si $M \in M_n(\mathbb{R})$ est normale, il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ tq
$$P^{-1}MP = {}^tPMP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_r & & & \\ & & & \tau_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & \tau_s \end{pmatrix}$$

+ projections et symétries.