135

End remarquables d'un ev hermitien de dim $<\infty$.

$(E, \langle , \rangle)$ est un ev hermitien et $u \in \mathcal{L}(E)$.

I) End hermitiens

1) Déf et caract

Déf : end herm
- u est herm ssi sa mat ds une BON est hermitienne

2) Réd

→ Si $M \in M_n(\mathbb{C})$ est herm, il existe $P \in U_n(\mathbb{C})$ tq
$P^{-1}MP = P^*MP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ avec $\lambda_i \in \mathbb{R}$

⇒ Décomp polaire
→ Si q est une fh sur E, il existe une BON de E orthogonale pour q.

II) End unitaires

1) Déf et caract

Déf : end unitaire
- Si u est unitaire, u est bij et $u^{-1} = u^*$
- u est unitaire ssi sa mat ds une BON est unitaire
  ssi elle conserve $\langle , \rangle$
  ssi elle envoie une BON sur une BON

2) Réd

→ Si $M \in U_n(\mathbb{C})$, il existe $P \in U_n(\mathbb{R})$ tq
$$P^{-1}MP = P^{*}MP = \begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{i\theta_n} \end{pmatrix}$$
⇒ $U_n(\mathbb{C})$ et $SU_n(\mathbb{C})$ st connexes

III) End normaux

1) Déf et caract

Déf : end normal
Ex : les end herm, antiherm et unitaires st normaux
• u est normal ssi sa mat ds une BON est normale

2) Réd

⇒ Réd d'un endo antiherm
→ Si $M \in M_n(\mathbb{C})$ est normale, il existe $P \in U_n(\mathbb{C})$ tq
$$P^{-1}MP = P^{*}MP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$ avec $\lambda_i \in \mathbb{C}$.