Apl affines

I) Apl affines

1) Def et 1ères propriétés

Def : apl aff
partie lin

- Une apl aff est caractérisée par sa partie lin et sa valeur en un pt : $f(x) = f(0) + \vec{f}(\vec{0x})$

Exples : 1) Les apl aff de partie lin nulle st les apl cstes.
2) Les apl aff de partie lin l'id st les translations
3) Une apl lin est aff et coincide avec sa partie lin.
4) Soit E un ev et $f : E \to E$ aff. Alors,
$f(x) = f(0) + \vec{f}(x)$ pour tt $x \in E$ ie $f = t_{f(0)} \circ \vec{f}$

- $f : X \to X'$ est aff ssi pour tt $n \geq 1$ et tt $\{(x_i, t_i)\}_{i=1,\dots,n}$ avec $x_i \in X$ et $\sum_{i=1}^{n} t_i = 1$, $f\left(\sum_{i=1}^{n} t_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} t_i f(x_i)$.
(conservation du barycentre)
- Soit $n = \dim X$, $(c_0, \dots, c_n)$ un repère aff de X et $c_0', \dots, c_n' \in X'$.
Alors, $f : \sum_{i=0}^{n} t_i c_i \mapsto \sum_{i=0}^{n} t_i c_i'$ avec $\sum_{i=0}^{n} t_i = 1$

est l'unique apl aff de X ds X' tq $f(c_i) = c_i'$ pour tt i.
De plus, f est inj (resp bij) ssi $(c_0', \dots, c_n')$ est afft libre (resp un rep aff) ds X'.

2) Pts fixes

- Soit $f : X \to X$ aff tq $f(0) = 0$. Alors,
(i) $f(x) = 0 + \vec{f}(\vec{0x})$ pour tt $x \in X$ ie ds $\vec{X_0}$, f est lin et se comporte comme $\vec{f}$ ds $\vec{X}$.
(ii) $\mathrm{Fix}(f) = 0 + \ker(\vec{f} - \mathrm{Id})$.

- Soit $f : X \to X$ aff avec $\dim X < \infty$.
Si $\ker(\vec{f} - Id) = \{0\}$, f a un unique pt fixe
- Soit $f : X \to X$ aff.
Si $\vec{X} = \ker(\vec{f} - Id) \oplus Im(\vec{f} - Id)$, il existe un unique $a \in \vec{X}$ et une unique appl aff $g : X \to X$ ayant un pt fixe tq $f = t_a \circ g \overset{!}{=} g \circ t_a$.
De plus, $\vec{a} \in \ker(\vec{f} - Id)$.

II) Proj et sym aff

1) Déf et caract

Déf : proj aff de X sur Y parallèlt à $\vec{Z}$.
- caract

(car $k \neq 2$)

Déf : sym aff autour de Y parallèlt à $\vec{Z}$
- Caract

2) Th de Thalès

$\Rightarrow$ Th de Papus
$\Rightarrow$ Th fond^{al} de la géom aff

III) Groupe aff

1) Déf

- Soit $f : X \to X'$ et $g : X' \to X''$ aff. Alors,
(i) $g \circ f$ est aff et $\overrightarrow{g \circ f} = \vec{g} \circ \vec{f}$.
(ii) f est bij ssi $\vec{f}$ l'est. Ds ce cas, f^{-1} est aff et $\overrightarrow{f^{-1}} = (\vec{f})^{-1}$

Exple : le plong^t barys est une bij aff.

Déf : gpe aff

2) Ssgpes

- $T(X) \lhd GA(X)$ et $T(X) \simeq \vec{X}$
- $GA_0(X) < GA(X)$ et $GA_0(X) \simeq GL(\vec{X})$
- $HT(X) < GA(X)$ et $f \in HT(X)$ ssi $f \in GA(X)$ transf une dte en une dte //.

3) Structure

- $GA(X) \simeq T(X) \rtimes GA_0(X) \simeq \vec{X} \rtimes GL(\vec{X})$

Déf : dilatation aff
transvection aff

- $GA(X)$ (resp $SA(X)$) est engendré par les dil (resp transv) aff.

IV) En géom aff euclidienne

1) Proj et sym aff orthog

Déf : proj aff orthog
- Caract

$\Rightarrow$ Distance d'un pt à un hyperplan.

Déf : sym aff orthog
- Caract
- composée de 2 sym //

2) Isométries aff

Déf : isométrie aff

Exple : une sym aff est une iso ssi c'est une sym orthog

- Caract
- Décomp canonique

=> Classif des iso aff planes.