Densité des fcts cont partt et dér nulle part. [ZQ] p 263

Th : $\{f \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{C})$ dér nulle part$\}$ est dense ds $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{C})$ muni de $\|\cdot\|_\infty$.

Dém :

On note $C = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{C})$ (c'est un Banach muni de $\|\cdot\|_\infty$)

$A = \{f \in C$ dér nulle part$\}$

$B = C \setminus A$

$F_n = \{f \in C, \exists x \in [0,1], \forall y \in [0,1], |f_n(x) - f(y)| \leq n|x-y|\}, n \in \mathbb{N}^*$

On veut mq $\overline{A} = C$ ie $\mathring{B} = \emptyset$.

A voir : 1) $B \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} F_n$

2) Les F_n st des fermés d'int vide

Ccl : $\mathring{B} \subset \overset{\circ}{\overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} F_n}} = \emptyset$ (th de Baire)

---

1) Soit $f \in B$.

Il suffit de trouver $x \in [0,1]$ tq $\varphi_x : [0,1] \setminus \{x\} \longrightarrow \mathbb{C}$

$$y \longmapsto \frac{f(x) - f(y)}{x - y}$$

soit bornée.

Or, il existe $x \in [0,1]$ tq f soit dér en x donc φ_x se prolonge par cont en x et donc φ_x est bornée ($\overline{\varphi_x}$ est cont sur le comp $[0,1]$ donc elle y est bornée)

2) F_n est fermé :

Soit $f_k \in F_n \longrightarrow f \in C$.

On cherche $x \in [0,1]$ tq pour tt $y \in [0,1]$, $|f(x) - f(y)| \leq n|x-y|$.

Vu que $(f_k) \subset F_n$, il existe $(x_k) \subset [0,1]$ tq pour tt $y \in [0,1]$,

$|f_k(x_k) - f_k(y)| \leq n|x_k - y|$.

Mais $[0,1]$ est comp donc, quitte à extraire une ss. suite, ops $x_k \longrightarrow x \in [0,1]$.

Il suffit alors de mq $f_k(x_k) - f_k(y) \longrightarrow f(x) - f(y)$ pour $\forall y \in [0,1]$.

Or, si $y \in [0,1]$,

$$\begin{aligned} |f_k(x_k) - f_k(y) - [f(x) - f(y)]| &\leq |f_k(x_k) - f(x_k)| + |f(x_k) - f(x)| \\ &\quad + |f_k(y) - f(y)| \\ &\leq 2\|f_k - f\|_\infty + |f(x_k) - f(x)| \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

<u>$\overset{\circ}{F_n} = \emptyset$:</u>

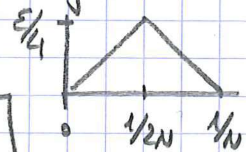
Soit $f \in F_n$ et $\varepsilon > 0$.

On cherche $g \in C$ tq $\begin{cases} \|f-g\|_\infty < \varepsilon \\ \forall x \in [0,1], \exists y \in [0,1], |f(x) - f(y)| > n|x-y|. \end{cases}$

Il existe P polynomiale tq $\|f - P\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$ (th de Weierstrass)

et $N \in \mathbb{N}$ tq $\frac{\varepsilon N}{2} \geq \|P'\|_\infty + n + 1$.

On vérifie alors que $g = P + g_0$ convient où g_0 est la fct $\frac{1}{N}$ périod déf par $g_0(x) = \begin{cases} \varepsilon N/2 \; x & \text{si } x \in [0, 1/2N] \\ \varepsilon/2 - \varepsilon N/2 \; x & \text{si } x \in [1/2N, 1/N] \end{cases}$



- $g \in C$
- $\|f - g\|_\infty \leq \|f - P\|_\infty + \|g_0\|_\infty < \varepsilon$
- Pour $\forall x, y \in [0,1]$, $|g(x) - g(y)| \geq |g_0(x) - g_0(y)| - |P(x) - P(y)|$

$$\underset{\text{(IAF)}}{\geq} |g_0(x) - g_0(y)| - \|P'\|_\infty |x - y|$$

mais pour $\forall x \in [0,1]$, il existe $y \in [0,1]$ tq

$$|g_0(x) - g_0(y)| = \frac{\varepsilon N}{2}|x - y| \geq (\|P'\|_\infty + n + 1)|x - y|$$

donc $|g(x) - g(y)| \geq (n+1)|x - y|$.