Base hilb de polyn orthog [Obj] p 140

Th : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et ρ une fct poids.
S'il existe $a>0$ tq $\int_I e^{a|x|}\rho(x)\,dx < +\infty$,
la famille des polyn orthog associée à ρ forme une base hilbertienne de $L^2(I,\rho)$.

Dém :
Soit (p_n) la famille des polyn orthog normalisés associée à ρ (on applique le procédé d'orthog de Gram-Schmidt à (x^n) puis on normalise).
Il s'agit de mq $\mathrm{Vect}(p_n, n\in\mathbb{N}) = \mathrm{Vect}(x^n, n\in\mathbb{N})$ est dense ds $L^2(I,\rho)$ ou encore que $\mathrm{Vect}(x^n, n\in\mathbb{N})^\perp = \{0\}$.
Soit donc $f\in L^2(I,\rho)$ tq $\langle f, x^n\rangle = 0$ pour $\forall n\in\mathbb{N}$

A voir : 1) $\varphi(x) = \begin{cases} f(x)\rho(x) & \text{si } x\in I \\ 0 & \text{si } x\in\mathbb{R}\setminus I\end{cases}$ déf une fct de $L^1(\mathbb{R})$

2) $\hat{\varphi} = 0$

Ccl : $\varphi = 0$ pp (injectivité de la transf de Fourier)
donc $f = 0$ pp ($\rho > 0$)

---

1) On rq que $t \leq \frac{1}{2}(1+t^2)$ pour $\forall t\geq 0$
donc $|f(x)|\rho(x) \leq \frac{1}{2}(1+|f(x)|^2)\rho(x)$ pour $\forall x\in I$
mais ρ et $|f|^2\rho$ st intégrables sur I donc $\varphi\in L^1(\mathbb{R})$.

2) On considère $F : B_a \longrightarrow \mathbb{C}$
$$z \longmapsto \int_I \underbrace{e^{-izx} f(x)\rho(x)}_{g(z,x)}\,dx$$
où $B_a = \{z\in\mathbb{C},\ |\mathrm{Im}\, z| < a/2\}$

Mais • $x \mapsto g(z,x)$ est mes pour tt $z \in B_a$
• $z \mapsto g(z,x)$ est holo pour $\forall x \in I$
• $|g(z,x)| \leqslant e^{a|x|/2} |f(x)| \rho(x)$ pour tt $z \in B_a$ et $\forall x \in I$

et $\int_I e^{a|x|/2} |f(x)| \rho(x) dx \underset{CS}{\leqslant} \left(\int_I e^{a|x|} \rho(x) dx\right)^{1/2} \left(\int_I |f(x)|^2 \rho(x) dx\right)^{1/2}$

$< +\infty$

donc F est bien déf, holo et $F^{(n)}(z) = (-i)^n \int_I x^n e^{-izx} f(x) \rho(x) dx$
pour tt $z \in B_a$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ (th d'holo ss $\int$).

Ep, $F^{(n)}(0) = (-i)^n \int_I x^n f(x) \rho(x) dx = (-i)^n \langle f, x^n \rangle = 0$
pour tt $n \in \mathbb{N}$ donc $F = 0$ au vois de 0 (unicité du DSE)
et donc $F = 0$ sur B_a (principe du prolongt analytique).
Ep, $F = 0$ sur l'axe réel ie $\hat{\varphi} = 0$.