Th de Weierstrass

[BL] p 63
[Rom] p 178

Th : les polyn st denses ds $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{C})$ muni de $\|\cdot\|_\infty$.

Dém

Soit $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{C})$.

OPS $[a,b]=[0,1]$ (sinon on considère $g(x)=f(a+(b-a)x)$)

On définit :

$B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$, $x\in[0,1]$, $n\in\mathbb{N}^*$.

$\omega(f,\delta) = \sup\{|f(x)-f(y)|,\ x,y\in[0,1] \text{ tq } |x-y|\leq\delta\}$, $\delta>0$

A voir : 1) $\|f-B_n(f)\|_\infty \leq \omega(f,\delta) + \frac{\|f\|_\infty}{2n\delta^2}$ pour $\forall\delta>0$ et $\forall n\in\mathbb{N}^*$

2) $\omega(f,\delta) \xrightarrow[\delta\to0^+]{} 0$.

Ccl : Soit $\varepsilon>0$.

Il existe $\delta_0>0$ tq $\omega(f,\delta_0)\leq\frac{\varepsilon}{2}$

$n_0\in\mathbb{N}^*$ tq $\frac{\|f\|_\infty}{2n\delta_0^2}\leq\frac{\varepsilon}{2}$ pour $\forall n\geq n_0$

donc $\|f-B_n(f)\|_\infty\leq\varepsilon$ pour $\forall n\geq n_0$.

---

1) Soit $\delta>0$, $n\in\mathbb{N}^*$ et $x\in[0,1]$.

On rq que $B_n(f)(x) = \mathbb{E}\left(f\left(\frac{Z}{n}\right)\right)$ où $Z\sim\mathcal{B}(n,x)$.

Alors,
$$\begin{aligned}|f(x)-B_n(f)(x)| &= \left|\mathbb{E}\left(f(x)-f\left(\tfrac{Z}{n}\right)\right)\right| \\ &\leq \mathbb{E}\left(\left|f(x)-f\left(\tfrac{Z}{n}\right)\right|\right) \\ &\leq \omega(f,\delta)\,\mathbb{P}\left(\left|\tfrac{Z}{n}-x\right|\leq\delta\right) \\ &\quad +2\|f\|_\infty\,\mathbb{P}\left(\left|\tfrac{Z}{n}-x\right|\geq\delta\right)\end{aligned}$$

$\leq \omega(f,\delta) + 2\|f\|_\infty \dfrac{Var(Z)}{n^2\delta^2}$ (Inégalité de Tchebitchov)

$\leq \omega(f,\delta) + \dfrac{\|f\|_\infty}{2n\delta^2}$ $\left(Var(Z) = nx(x-1) \leq \dfrac{n}{4} \right)$

2) Soit $\varepsilon > 0$

f est unif^t cont sur $[0,1]$ (th de Heine) donc il existe $\alpha > 0$ tq $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$ pour tt $x, y \in [0,1]$, $|x-y| \leq \alpha$ et donc $\omega(f,\alpha) \leq \varepsilon$ d'où $\omega(f,\delta) \leq \varepsilon$ pour tt $\delta \leq \alpha$ ($\delta \mapsto \omega(f,\delta)$ est $\nearrow$)

Appl : Th des moments.

Soit $f \in \mathcal{C}([a,b], \mathbb{C})$.

Si $\int_a^b f(t) t^n \, dt = 0$ pour tt $n \in \mathbb{N}$, $f = 0$.

Dém :

On rq que $\int_a^b f(t) P(t) \, dt = 0$ pour tt $P \in \mathbb{C}[X]$.

D'après le th de Weierstrass, il existe une suite $(P_n) \subset \mathbb{C}[X]$ qui cu vers $\bar{f}$ sur $[a,b]$ mais f est bornée sur $[a,b]$ (cont sur le comp $[a,b]$) donc (fP_n) cu vers $|f|^2$ sur $[a,b]$ et donc $0 = \lim_{n \to \infty} \int_a^b f(t) P_n(t) \, dt = \int_a^b |f(t)|^2 dt$

d'où $f = 0$ ($|f|^2$ est cont et positive)