Un critère de C^1 difféo. [Gou] p345

Th : Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ C^1 tq $\begin{cases} df_x \text{ soit inversible pour tt } x \in \mathbb{R}^n. \\ \lim\limits_{\|x\| \to +\infty} \|f(x)\| = +\infty \end{cases}$

Si f a un unique zéro, f est un C^1 difféo.

Dém :

On considère $\phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$
$y \longmapsto \mathrm{Card}\,(f^{-1}(\{y\}))$

A voir : 1) ϕ est à valeurs ds $\mathbb{N}^*$

2) $\phi^{-1}(\{m\})$ est ouvert pour tt $m \in \mathbb{N}^*$

Ccl : $\mathbb{R}^n \underset{1)}{=} \bigcup_{m \in \mathbb{N}^*} \phi^{-1}(\{m\}) = \phi^{-1}(\{1\}) \cup \bigcup_{m \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}} \phi^{-1}(\{m\})$

est une partition de $\mathbb{R}^n$ en 2 ouverts (2)) mais $\phi^{-1}(\{1\}) \neq \emptyset$ ($\phi(0) = 1$) donc $\mathbb{R}^n = \phi^{-1}(\{1\})$ ($\mathbb{R}^n$ est connexe) ie f est bijective d'où le résultat.

---

1) Rq : Si K est comp, $f^{-1}(K)$ l'est aussi.

En effet, $f^{-1}(K)$ est fermé (K est fermé et f cont) et borné ($\exists M > 0, \forall y \in K, \|y\| \leq M$ mais $\exists A > 0, \forall x \in \mathbb{R}^n, \|x\| > A, \|f(x)\| > M$ donc $\forall x \in f^{-1}(K), \|x\| \leq A$) donc comp (dim $< \infty$).

Soit $y \in \mathbb{R}^n$.

$\underline{\phi(y) < +\infty}$:

$f^{-1}(\{y\})$ est comp (Rq) donc il suffit de mq ses pts st isolés.

Or, si $x \in f^{-1}(\{y\})$, f est un C^1 difféo local en x

(th d'inv locale) donc il existe un vois V de x sur lequel f est inj et donc $V \cap f^{-1}(y) = \{x\}$ ie x est isolé.

$\phi(y) \neq 0$:

Il s'agit de mq f est surj mais $f(\mathbb{R}^n)$ est ouvert (f est ouverte car df_x est inv pour $\forall x \in \mathbb{R}^n$) et fermé ($f$ est fermé car $f^{-1}(K)$ est comp pour $\forall$ comp K) donc $f(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$ ($\mathbb{R}^n$ est connexe).

2) Soit $m \in \mathbb{N}^*$, $y \in \phi^{-1}(\{m\})$ et $f^{-1}(\{y\}) = \{x_1, \dots, x_m\}$

$\forall \varepsilon > 0, \exists V$ vois ouv de y, $f^{-1}(V) \subset \bigcup_{i=1}^{m} B(x_i, \varepsilon)$:

Soit $\varepsilon > 0$.

Par l'abs, on supp que pour $\forall p \in \mathbb{N}$, $f^{-1}\left(B\left(y, \frac{1}{2^p}\right)\right) \not\subset \bigcup_{i=1}^{m} B(x_i, \varepsilon)$

Il existe alors (z_p) tq $z_p \in f^{-1}\left(B\left(y, \frac{1}{2^p}\right)\right) \setminus \bigcup_{i=1}^{m} B(x_i, \varepsilon)$.

Mais $f^{-1}(\bar{B}(y,1))$ est comp (Rq) donc on peut extraire de (z_p) une ss. suite tq $z_{p_k} \longrightarrow z \in \bar{B}(y,1)$ mais $\| f(z_{p_k}) - y \| < \frac{1}{2^{p_k}}$ donc $f(z) = y$ (f est cont)

et donc il existe $i \in \{1, \dots, m\}$ tq $z = x_i$ $\lightning$ (sinon, $z_{p_k} \in B(x_i, \varepsilon)$ pour k assez gd)

$\exists W$ vois ouv de y, $W \subset \phi^{-1}(\{m\})$:

Pour $\forall i \in \{1, \dots, m\}$, il existe $\varepsilon_i > 0$ tq f soit inj sur $B(x_i, \varepsilon_i)$ (th d'inv locale) et quitte à diminuer ε_i, OPS les $B(x_i, \varepsilon_i)$ disjointes 2 à 2.

On applique ce qui précède à $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m\} > 0$ ce qui fournit un vois ouvert V de y tq $f^{-1}(V) \subset \bigcup_{i=1}^{m} B(x_i, \varepsilon)$.

On vérifie que $W = V \cap \Gamma$ convient avec $\Gamma = \bigcap_{i=1}^{m} f(B(x_i, \varepsilon))$:

- W est un vois ouv de y (f est ouverte)
- Si $z \in W$, $\phi(z) \leq m$ ($z \in V$ et f est inj sur $B(x_i, \varepsilon)$)

  $\phi(z) \geq m$ ($z \in \Gamma$ et les $B(x_i, \varepsilon)$ st disj 2 à 2)

donc $z \in \phi^{-1}(\{m\})$.