Principe des zéros isolés [Rud] p 202.

Th : Soit Ω un domaine de $\mathbb{C}$, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ et $Z(f) = \{a \in \Omega, f(a) = 0\}$
Alors, soit $Z(f) = \Omega$
soit $Z(f)$ n'a pas de pt d'accum ds Ω
Ds le dernier cas, pour tt $a \in Z(f)$, il existe $m \in \mathbb{N}^*$ et $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ tq $f(z) = (z-a)^m g(z)$ pour tt $z \in \Omega$ et $g(a) \neq 0$.

Dém :
On note $A = \{$pts d'accum de $Z(f)$ ds $\Omega\}$
Soit $a \in Z(f)$ (on regarde ce qu'il se passe pour a)
Il existe alors $r > 0$ tq $D(a,r) \subset \Omega$ donc $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n (z-a)^n$ pour tt $z \in D(a,r)$.
Si $c_n = 0$ pour tt $n \geq 1$, $D(a,r) \subset Z(f)$ donc $D(a,r) \subset A$.
(si $z \in D(a,r)$, il existe $\varepsilon > 0$ tq $D(z,\varepsilon) \subset D(a,r) \subset Z(f)$ donc $z \in A$).
Sinon, il existe un plus petit entier $m \geq 1$ tq $c_m \neq 0$.

$$g(z) = \begin{cases} f(z)/(z-a)^m & \text{si } z \in \Omega \setminus \{a\} \\ c_m & \text{si } z = 0 \end{cases}$$ définit alors une

fct holo sur Ω $\left(g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{m+n} (z-a)^n \text{ pour tt } z \in D(a,r) \right)$

tq $f(z) = (z-a)^m g(z)$ pour tt $z \in \Omega$ et $g(a) \neq 0$.
Ep, il existe un vois de a sur lequel g ne s'annule pas (g est cont) donc a est un pt isolé de $Z(f)$.

Ccl : Si $A \neq \emptyset$, A est ouvert (si $a \in A$, $a \in Z(f)$ car f est cont et a n'est pas isolé donc il existe $r > 0$ tq $D(a,r) \subset A$) et fermé (un ens de pts d'accum est fermé) donc $A = \Omega$ (Ω est connexe) et donc $Z(f) = \Omega$ ($A \subset Z(f)$ car f est cont)

Sinon, pour tt $a \in Z(f)$, a est isolé donc il existe

$m \in \mathbb{N}^*$ et $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ tq $f(z) = (z-a)^m g(z)$ pour tt $z \in \Omega$ et $g(a) \neq 0$.

App[1] : Soit $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$.
Si pour tt $z \in \mathbb{C}$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tq $f^{(n)}(z) = 0$, f est polyn.

Dém :
On note $F_n = \{z \in \mathbb{C},\ f^{(n)}(z) = 0\}$, $n \in \mathbb{N}$.
On rq que les F_n st fermés et que $\bigcup_n F_n$ n'est pas d'int vide ($\bigcup_n F_n = \mathbb{C}$ par hyp) donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tq $\mathring{F}_{n_0} \neq \emptyset$ (th de Baire) et donc $Z(f^{(n_0)})$ possède un pt d'accum ds $\mathbb{C}$ (prendre un pt de $\mathring{F}_{n_0}$) d'où $f^{(n_0)} = 0$ sur $\mathbb{C}$ (principe des zéros isolés) et le résultat suit.