Compacité faible de $\overline{B}_H(0,1)$ [Gou] p 405

Th : Soit $(x_n) \subset \overline{B}_H(0,1)$.
Il existe alors une ss-suite (y_n) de (x_n) qui cvge faibl^t ds $\overline{B}_H(0,1)$

Dém :

A voir : 1) Il existe une ss. suite (y_n) de (x_n) tq $(\langle y_n, x_k\rangle)_n$ cvge pour $\forall k \in \mathbb{N}$.

2) $(\langle y_n, v\rangle)_n$ cvge pour $\forall v \in \overline{\mathrm{Vect}(x_n, n\in\mathbb{N})} =: E$

3) $\exists ! u \in E, \forall v \in E, \lim\limits_{n\to\infty} \langle y_n, v\rangle = \langle u, v\rangle$.

De plus, $u \in \overline{B}_H(0,1)$.

4) $\lim\limits_{n\to\infty} \langle y_n, v\rangle = \langle u, v\rangle$ pour $\forall v \in H$.

---

1) $(\langle x_n, x_0\rangle)$ est bornée (CS) donc il existe une ss. suite (x_n^0) de (x_n) tq $(\langle x_n^0, x_0\rangle)$ cvge (B.W)
De m̂, $(\langle x_n^0, x_1\rangle)$ est bornée donc il existe une ss. suite (x_n^1) de (x_n^0) tq $(\langle x_n^1, x_1\rangle)$ cvge.
En procédant par réc, on construit ainsi, pour $\forall k \in \mathbb{N}$, une ss. suite (x_n^k) tq $(\langle x_n^k, x_k\rangle)$ cvge.
On rq alors que la suite diag déf par $y_n = x_n^n$ pour $\forall n$ convient (pour $\forall k \in \mathbb{N}$, $(y_n)_{n\geq k}$ est une ss. suite de (x_n^k))

2) Soit $v \in E$.
Il suffit de mq $(\langle y_n, v\rangle)$ est de Cauchy.
Or, si $\varepsilon > 0$, il existe $w \in \mathrm{Vect}(x_n, n\in\mathbb{N})$ tq $\|v - w\| < \varepsilon$
et $N \in \mathbb{N}$ tq pour $\forall p, q \geq N$, $|\langle y_p, w\rangle - \langle y_q, w\rangle| < \varepsilon$
($(\langle y_n, w\rangle)$ cvge par linéarité) donc

$$|\langle y_p, v\rangle - \langle y_q, v\rangle| \leq |\langle y_p, v-w\rangle| + |\langle y_p, w\rangle - \langle y_q, w\rangle| + |\langle y_q, v-w\rangle|$$
$$\leq 2\|v-w\| + |\langle y_p, w\rangle - \langle y_q, w\rangle|$$
$$\leq 3\varepsilon \text{ pour } \forall\, p, q \geq N.$$

3) On considère $E \longrightarrow \mathbb{R}$ (elle est bien déf d'après 2))
$$v \longmapsto \lim_{n\to\infty} \langle y_n, v\rangle$$

On rq que c'est une fl cont (la continuité est assurée par celle de $|.|$ et par CS) sur le Hilbert E (sev fermé de H) d'où le résultat (th de rep de Riesz).

De plus, $|\langle y_n, u\rangle| \underset{CS}{\leq} \|u\|$ pour $\forall n$ donc
$\|u\|^2 = |\langle u, u\rangle| \leq \|u\|$ et donc $\|u\| \leq 1$.

4) Soit $v \in H$.
On rq que $H = E \oplus E^\perp$ (E est un sev fermé de H) donc $v = v_1 + v_2$ avec $v_1 \in E$ et $v_2 \in E^\perp$ donc $\langle y_n, v\rangle = \langle y_n, v_1\rangle$ pour $\forall n$ ($y_n \in E$) et donc $\lim_{n\to\infty} \langle y_n, v\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle y_n, v_1\rangle$
$$= \langle u, v_1\rangle \quad (3))$$
$$= \langle u, v\rangle \quad (u \in E)$$