Th de Baire [Gou] p 20, 391.

<u>Th</u> : Soit E un em complet.
Si (O_n) est une suite d'ouverts denses ds E, $\bigcap_n O_n$ est dense ds E.

<u>Dém</u> :
Soit V un ouvert non vide de E.
<u>A voir</u> : 1) Il existe une suite (B_n) de boules fermées de E
tq $\begin{cases} B_n \text{ soit de rayon} \neq 0 \text{ et } \leq \frac{1}{2^n} \\ B_0 \subset O_0 \cap V \text{ et } B_{n+1} \subset O_{n+1} \cap \mathring{B}_n \end{cases}$
2) Il existe $x \in E$ tq $\bigcap_n B_n = \{x\}$.

<u>Ccl</u> : $x \in V \cap \left[\bigcap_n O_n\right]$.

---

1) $O_0 \cap V$ est un ouvert non vide (O_0 est dense ds E) donc il existe $x_0 \in E$ et $r_0 > 0$ tq $B(x_0, r_0) \subset O_0 \cap V$ et donc $B_0 := \overline{B}\left(x_0, \min\left\{\frac{r_0}{2}, 1\right\}\right)$ convient.
De m̂, $O_1 \cap \mathring{B}_0$ est un ouvert non vide (O_1 est dense ds E) donc il existe $x_1 \in E$ et $r_1 > 0$ tq $B(x_1, r_1) \subset O_1 \cap \mathring{B}_0$ et donc $B_1 := \overline{B}\left(x_1, \min\left\{\frac{r_1}{2}, \frac{1}{2}\right\}\right)$ convient.
On construit ainsi par réc la suite (B_n).

2) Cela résulte du
<u>Lemme</u> : Soit (E, d) un em complet.
Si (F_n) est une suite $\searrow$ de fermés non vides tq $\mathrm{diam}(F_n) \longrightarrow 0$, il existe $x \in E$ tq $\bigcap F_n = \{x\}$.

dém : $\bigcap F_n$ a au plus un élt ($\mathrm{diam}(F_n) \to 0$) donc il suffit de mq $\bigcap F_n \neq \emptyset$.

Or, pour tt n, il existe $x_n \in F_n$ donc (x_n) est de Cauchy (si $\varepsilon > 0$, il existe N tq $\mathrm{diam}(F_N) \leq \varepsilon$ donc $d(x_p, x_q) \leq \varepsilon$ pour tt $p, q \geq N$) et donc $x_n \to x \in E$ (E est complet) d'où $x \in \bigcap_n F_n$ ($x_p \in F_n$ pour tt $p \geq n$ et F_n est fermé).

Appl : Un evn admettant une base dénombrable n'est pas complet.

Dém : Soit E un evn et $(e_n)_n$ une base de E.

Alors, $F_n = \mathrm{Vect}(e_0, \dots, e_n)$ est un fermé (sev de dim $< \infty$) d'intérieur vide (sinon, il existe $x \in F_n$ et $r > 0$ tq $B(x,r) \subset F_n$ donc $B(0,r) = B(x,r) - \{x\} \subset F_n$ et donc $E \subset F_n$ $\lightning$).

Par l'abs, on supp que E est complet.

Alors, $\overset{\circ}{\overline{\bigcup F_n}} = \emptyset$ (th de Baire) $\lightning$ ($\bigcup F_n = E$).