Th de Cauchy-Lipschitz [Pom] p 302.

Th : Soit E un Banach, U un ouvert de $\mathbb{R}\times E$, $f : U \to E$ cont et loc. lipsch en la 2ème var et $(x_0, y_0) \in U$.
Alors, il existe une sol (I, ϕ) de $y' = f(x,y)$ (E) qui passe par (x_0,y_0).
De plus, si (J, ψ) est une sol de (E) qui passe par (x_0,y_0), il existe un vois V de x_0 ds $I\cap J$ sur lequel $\phi = \psi$.

Dém :
f est loc bornée (cont) et loc. lipsch en y donc il existe $r>0$ tq $P = [x_0-r, x_0+r]\times \overline{B}(y_0,r) \subset U$ et tq f soit bornée par $M>0$ et k-lipsch en y sur P.
On note $A(\alpha) = C([x_0-\alpha, x_0+\alpha], \overline{B}(y_0,r))$, $0<\alpha<r$.
On considère $F_\alpha : A(\alpha) \to C([x_0-\alpha, x_0+\alpha], E)$ $\quad 0<\alpha<r$.

$$\phi \mapsto \left(x \mapsto y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t,\phi(t))\,dt\right)$$

On prend $0<\alpha<\min\left(r, \frac{r}{M}, \frac{1}{k}\right)$.

A voir : F_α est une contraction stricte à valeurs ds $A(\alpha)$.
Ccl : Le th du pt fixe de Picard nous assure que F_α admet un unique pt fixe ϕ ($A(\alpha)$ est complet car $\overline{B}(y_0,r)$ est fermé ds le complet E) donc $(]x_0-\alpha, x_0+\alpha[, \phi)$ convient.
De plus, si (J,ψ) est une sol de E qui passe par (x_0,y_0), il existe $\beta>0$ tq $V = [x_0-\beta, x_0+\beta] \subset]x_0-\alpha, x_0+\alpha[\cap J$ donc $\phi_{|V} = \psi_{|V}$ est l'unique pt fixe de F_β.

F_α est à valeurs ds $A(\alpha)$:

Soit $\phi \in A(\alpha)$ et $x \in [x_0-\alpha, x_0+\alpha]$.

Alors, $\|F_\alpha(\phi)(x) - y_0\| = \| \int_{x_0}^{x} f(t,\phi(t))\,dt \|$

$$\leq |x-x_0| M$$

$$\leq \alpha M$$

$$< r$$

<u>F est une contraction stricte</u> :

Soit $\phi, \psi \in A(\alpha)$.

Alors, pour tt $x \in [x_0-\alpha, x_0+\alpha]$,

$$\|(F_\alpha(\phi) - F_\alpha(\psi))(x)\| = \| \int_{x_0}^{x} \left(f(t,\phi(t)) - f(t,\psi(t))\right) dt \|$$

$$\leq |x-x_0|\, k\, \|\phi-\psi\|_\infty$$

$$\leq \alpha k \|\phi-\psi\|_\infty$$

donc $\|F_\alpha(\phi) - F_\alpha(\psi)\|_\infty \leq \alpha k \|\phi-\psi\|_\infty$ avec $\alpha k < 1$.