Prolong^t méromorphe de Γ à $\mathbb{C}$ [ZQ] p 306.

Th : $\Gamma :]0,+\infty[\to \mathbb{C}$
$x \mapsto \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$ se prolonge méromorphiqu^t à $\mathbb{C}$

Dém :

A voir : 1) $\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)}$ pour $\forall x>0$ (formule d'Euler)

2) $G(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{z(z+1)\cdots(z+n)}{n^z \, n!}$ $(z\in\mathbb{C})$ définit une fct entière qui s'annule en les zéros simples $-\mathbb{N}$.

Ccl : $\frac{1}{G}$ est méromorphe sur $\mathbb{C}$ et coïncide avec Γ sur $]0,+\infty[$.

---

1) Soit $x>0$.

On considère la suite de fcts déf par $f_n(t) = \mathbb{1}_{]0,n[}(t)\left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}$ pour $\forall t>0$ et $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

On rq que (f_n) CS sur $]0,\infty[$ vers $t\mapsto \mathbb{1}_{]0,\infty[}(t) e^{-t} t^{x-1}$.

De plus, (f_n) est $\nearrow$. En effet, si $n\in\mathbb{N}^*$, $f_{n+1}\geq f_n$ en dehors de $]0,n[$ mais aussi sur $]0,n[$ puisque $n\ln\left(1-\frac{t}{n}\right) = -t\,\frac{\ln(1)-\ln(1-\frac{t}{n})}{1-(1-\frac{t}{n})}$ est le tg d'une suite $\nearrow$ par concavité du log.

Donc $\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \int_0^n t^{x-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n dt$ (th de cvgce monotone)

et donc $\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} n^x \int_0^1 s^{x-1}(1-s)^n ds$ $\left(s=\frac{t}{n}\right)$.

Mais $I_n(x) = \int_0^1 s^{x-1}(1-s)^n ds = \frac{n!}{x(x+1)\dots(x+n)}$ pour $\forall n\in\mathbb{N}$.

En effet,

$\underline{n=0}$: $\int_0^1 s^{x-1} ds = \left[\frac{s^x}{x}\right]_0^1 = \frac{1}{x}$

$n \geq 0$: $I_n(x) = \int_0^1 s^{x-1}(1-s)^n \, ds$

$\underset{IPP}{=} \left[\frac{s^x}{x}(1-s)^n \right]_0^1 + \frac{n}{x} I_{n-1}(x+1)$ (hyp de réc)

$= \frac{n!}{x(x+1)\dots(x+n)}$

2) On mq que $G(z) = \lim_{n\to\infty} G_n(z)$ pour tt $z \in \mathbb{C}$ où

$$G_n(z) = \frac{z(z+1)\dots(z+n)}{(n+1)^z \, n!}$$

$$= z\, e^{-z\ln(n+1)} \prod_{k=1}^{n} \left(1+\frac{z}{k}\right)$$

$$= z\, e^{z\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k}{k+1}\right)} \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{z}{k}\right)$$

$$= z \prod_{k=1}^{n} f_k(z) \quad \text{avec } f_k(z) = \left(1+\frac{z}{k}\right) e^{z\ln\left(\frac{k}{k+1}\right)}.$$

Soit $R > 0$.

Alors, pour tt $z \in D(0,R)$ et tt $n > R$

$$G_n(z) = z \prod_{k=1}^{[R]} f_k(z) \prod_{k=[R]+1}^{n} e^{\log\left(1+\frac{z}{k}\right) - z\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)} \quad \left(\text{si } k > R,\ \left|\frac{z}{k}\right| < 1\right)$$

$$= z \prod_{k=1}^{[R]} f_k(z)\, e^{\sum_{k=[R]+1}^{n} \left[\log\left(1+\frac{z}{k}\right) - z\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)\right]}$$

donc il suffit de mq $\sum_{n\geq [R]+1} \left[\log\left(1+\frac{z}{n}\right) - z\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]$

cu sur $D(0,R)$ car alors $G(z) = z \prod_{k=1}^{[R]} f_k(z)\, e^{\sum_{n=[R]+1}^{\infty}[\quad]}$ est holo

sur $D(0,R)$ et ses zéros (simples) sur $D(0,R)$ st $-1, \dots, -[R]$.

Or, $\left|\log\left(1+\frac{z}{n}\right) - z\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right| \leq \frac{C_R}{n^2}$ pour tt $z \in D(0,R)$ et tt $n \geq 2R$.

En effet, $|\log(1+u) - u| \leq 2|u|^2$ pour tt $|u| \leq \frac{1}{2}$ (si $f(u) = \log(1+u)$,

$|\log(1+u) - u| = |f(u) - f(0) - uf'(0)| \leq \frac{|u|^2}{2} \sup_{|v|\leq\frac{1}{2}} |f''(v)| = 2|u|^2$)

donc $\left|\log\left(1+\frac{z}{n}\right)-z\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right| \leq \left|\log\left(1+\frac{z}{n}\right)-\frac{z}{n}\right|+|z|\left|\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n}\right|$

$\leq 2\left|\frac{z}{n}\right|^2+\frac{|z|}{n^2}$ $\left(|z| \leq \frac{n}{2} \text{ et } n \geq 2\right)$

$\leq \frac{2R^2+R}{n^2}$ pour $\forall z \in D(0,R)$ et $\forall n \geq 2R$.