Th de Hahn-Banach [Rud] p 133

Th : Soit X un $\mathbb{R}$-evn, M un sev de X et f une fl cont sur M.
Alors, f se prolonge en une fl F cont sur X tq $\|F\| = \|f\|$

Dém :

OPS $\|f\| = 1$ $\left(\begin{array}{l} \text{si } \|f\| = 0,\ F = 0 \text{ convient} \\ \text{si } \|f\| \neq 0, \text{ on considère } g = \frac{1}{\|f\|} f \end{array} \right)$

On considère $\mathcal{P} = \left\{ (M', f'),\ \begin{array}{l} M' \text{ sev de } X \text{ contenant } M \\ f' \text{ fl cont sur } M' \text{ qui prolonge } f \text{ et tq } \|f'\| = 1 \end{array} \right\}$

On ordonne partiell^t $\mathcal{P}$ en disant que
$(M', f') \leq (M'', f'') \Leftrightarrow M' \subset M''$ et $f' = f''$ sur M'.

$\mathcal{P} \neq \emptyset$ ($(M, f) \in \mathcal{P}$) donc il existe un ss. ens Ω de $\mathcal{P}$ total^t ordonné et maximal (th de max de Hausdorff)

On note $\Phi = \{ M',\ (M', f') \in \Omega \}$.
$\tilde{M} = \bigcup_{M' \in \Phi} M'$.

Alors, $\tilde{M}$ est un sev de X (Φ est total^t ordonné pour $\subset$) et
$F : \tilde{M} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f'(x)$ si $x \in M'$ est une fl cont sur $\tilde{M}$ qui prolonge f et tq $\|F\| = 1$ (F est bien déf et est une fl sur $\tilde{M}$ car Ω est total^t ordonné et par déf, F est cont, $\|F\| \leq 1$ et F prolonge f donc $\|F\| \geq 1$)

A voir : $\tilde{M} = X$

Par l'absurde, on supp que $\tilde{M} \subsetneq X$.
Il existe alors $x_0 \in X \setminus \tilde{M}$.

On note $M_1 = \tilde{M} + \mathbb{R}x_0$.

On va mq F se prolonge en une fl F_1 cont sur M_1 et tq $\|F_1\| = 1$

ce qui contredira la maximalité de Ω.

Pour tt $\alpha \in \mathbb{R}$, $F_1 : M_1 \to \mathbb{R}$ est une fl sur M_1

$$x + \lambda x_0 \mapsto F(x) + \lambda\alpha$$

qui prolonge F.

On cherche donc $\alpha \in \mathbb{R}$ tq F_1 soit cont et $\|F_1\| \leq 1$

(car alors $\|F_1\| \geq 1$ comme prolong^t de F_1) ce qui équiv

à $|F(x) + \lambda\alpha| \leq \|x + \lambda x_0\|$ pour tt $x \in \tilde{M}$ et tt $\lambda \in \mathbb{R}$

ou encore à $|F(x) - \alpha| \leq \|x - x_0\|$ pour tt $x \in \tilde{M}$

ou encore à $\alpha \in [A_x, B_x]$ pour tt $x \in \tilde{M}$ avec

$$\begin{cases} A_x = F(x) - \|x - x_0\| \\ B_x = F(x) + \|x - x_0\| \end{cases}$$

Mais $A_x \leq B_y$ pour tt $x, y \in \tilde{M}$ $\left(\begin{aligned} F(x) - F(y) &= F(x-y) \\ &\leq \|x-y\| \\ &\leq \|x - x_0\| + \|y - x_0\| \end{aligned}\right)$

donc il existe $\alpha \in [A_x, B_x]$ pour tt $x \in \tilde{M}$.