2ème th de Dini

[Gou] p 229.
[Nou] p 107

Th : Soit (f_n) une suite de fcts réelles $\nearrow$ sur $[a,b]$.
Si (f_n) CS vers une fct cont f, elle CU.

Dém :
Soit $\varepsilon > 0$.
On cherche $N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \forall x \in [a,b], |f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon$

f est cont sur le comp $[a,b]$ donc elle y est unif^t cont (th de Heine) et donc :
$\exists \eta > 0, \forall x, x' \in [a,b], |x - x'| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(x')| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.
On considère alors une subd $a = x_0 < x_1 < \dots < x_p = b$ de $[a,b]$ de pas $\leq \eta$.
On rq que : $\forall i \in \{1, \dots, p\}, \exists n_i \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_i, |f(x_i) - f_n(x_i)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$
$(f_n(x_i) \to f(x_i))$
On vérifie que $N = \max_{1 \leq i \leq p} n_i$ convient :
Soit donc $n \geq N$ et $x \in [a,b]$.
Il existe alors $i \in \{1, \dots, p-1\}$ tq $x \in [x_i, x_{i+1}]$ donc
$f_n(x_i) \leq f_n(x) \leq f_n(x_{i+1})$ et $f(x_i) \leq f(x) \leq f(x_{i+1})$
(f_n est $\nearrow$ et f est $\nearrow$ comme lim simple de fcts $\nearrow$)
et donc $f(x_i) - f_n(x_{i+1}) \leq f(x) - f_n(x) \leq f(x_{i+1}) - f_n(x_i)$
mais $\underbrace{|f(x_i) - f_n(x_{i+1})| \leq |f(x_i) - f(x_{i+1})| + |f(x_{i+1}) - f_n(x_{i+1})|}_{\leq \varepsilon}$
et $|f(x_{i+1}) - f_n(x_i)| \leq \varepsilon$ (idem) donc $|f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon$.

Appl : Soit (U_i) une suite de vai iid de loi $\mathcal{U}([0,1])$.
Alors, $\sup_{s \in [0,1]} \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\{U_i \leq s\}} - s \right| \xrightarrow[n \to +\infty]{p.s} 0$

Dém :

D'après le 2ème th de Dini, il suffit de mq :

p.s, $\forall s \in [0,1]$, $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\{U_i \leq s\}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} s$

(si $\omega \in \Omega$, $s \mapsto \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\{U_i \leq s\}}(\omega)$ est $\nearrow$ pour tt $n \geq 1$ et

$s \mapsto s$ est cont).

Or, d'après la LGN,

$\forall s \in [0,1], \exists N_s \subset \Omega$ négl, $\forall \omega \in \Omega \setminus N_s$, $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\{U_i \leq s\}}(\omega) \to s$

(Pour s fixé, $(\mathbb{1}_{\{U_i \leq s\}})$ est une suite de var iid tq

$\mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{U_i \leq s\}}) = \mathbb{P}(U_i \leq s) = s$)

" On voudrait alors échanger les quantif. "

Comme une réunion dénombrable d'ens négl est encore négl,

$\exists N \subset \Omega$ négl, $\forall \omega \in \Omega \setminus N$, $\forall s \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$, $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\{U_i \leq s\}}(\omega) \to s$.

En fait, c'est vrai pour tt $s \in [0,1]$. En effet, si $s \in [0,1]$,
il existe une suite $\nearrow$ (resp $\searrow$) (s_k) (resp (t_k)) de $[0,1] \cap \mathbb{Q}$
qui tend vers s ($\mathbb{Q}$ est dense ds $\mathbb{R}$) donc

$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\{U_i \leq s_k\}}(\omega) \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\{U_i \leq s\}}(\omega) \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\{U_i \leq t_k\}}(\omega)$

pour tt k et tt n et donc

$s_k \leq \liminf_n \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\{U_i \leq s\}}(\omega) \leq \limsup_n \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\{U_i \leq s\}}(\omega) \leq t_k$

pour tt k d'où le résultat ($k \to +\infty$).