Th de Glivenko. Cantelli . [Nou] p106.

Th : Soit (X_i) une suite de var iid de fct de rép F.
Si $F_n(t) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\{X_i \leq t\}}$, $t \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$,
$\sup_{t\in\mathbb{R}} |F_n(t) - F(t)| \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s} 0$

Dém :
Soit (U_i) une suite de var iid de loi $\mathcal{U}([0,1])$.
A voir : 1) $\sup_{t\in\mathbb{R}} |F_n(t) - F(t)| \leq \sup_{s\in[0,1]} \left| \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\{U_i \leq s\}} - s \right|$

2) $\sup_{s\in[0,1]} \left| \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\{U_i \leq s\}} - s \right| \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s} 0$

---

1) On considère $F^{\leftarrow}(u) = \inf\{x \in \mathbb{R}, F(x) \geq u\}$, $u \in [0,1]$

• $\mathcal{L}(X_i) = \mathcal{L}(F^{\leftarrow}(U_i))$:

Il suffit de mq $F^{\leftarrow}(u) \leq x \Leftrightarrow u \leq F(x)$
pour $\forall x \in \mathbb{R}$ et $\forall u \in [0,1]$ car alors
$\mathbb{P}(F^{\leftarrow}(U_i) \leq x) = \mathbb{P}(U_i \leq F(x)) = F(x)$ pour $\forall x \in \mathbb{R}$.
Soit donc $x \in \mathbb{R}$ et $u \in [0,1]$.
$\Leftarrow$: c'est évident
$\Rightarrow$: $\exists (x_k) \in \mathbb{R}$ tq $\begin{cases} F(x_k) \geq u \\ x_k \searrow F^{\leftarrow}(u) \end{cases}$ (par déf de inf)

donc $F(F^{\leftarrow}(u)) \geq u$ (F est cont à dte)
et donc $F(x) \geq u$ (F est $\nearrow$)

• D'après le 1er •, on a :

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \left| \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\{X_i \leq t\}} - F(t) \right| = \sup_{t\in\mathbb{R}} \left| \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\{F^{\leftarrow}(U_i) \leq t\}} - F(t) \right|$$

$$= \sup_{t\in\mathbb{R}} \left| \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\{U_i \leq F(t)\}} - F(t) \right|$$

$$= \sup_{s\in F(\mathbb{R})} \left| \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\{U_i \leq s\}} - s \right|$$

$$\leq \sup_{s\in[0,1]} \left| \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\{U_i \leq s\}} - s \right|$$

2) cf 2ème th de Dini.