Th de l'appl ouverte [Gou] p 397

Th : Soit E, F deux Banach et $T : E \to F$ lin, cont et surj.
Alors, T est ouverte.

Dém :
On note $B(r) = B(0,r)$, $r > 0$.
A voir : 1) $\overline{T(B(r))}$ est un vois de 0.
2) $\overline{T(B(\frac{r}{2}))} \subset T(B(r))$.

Ccl : $T(B(r))$ est un vois de 0.
Soit Ω un ouvert de E et $x \in \Omega$.
Alors, $\Omega - x$ est un vois de 0 donc $T(\Omega - x)$ est un vois de 0 et donc $T(\Omega) = T(x) + T(\Omega - x)$ est un vois de $T(x)$.

---

1) On considère $F_n = \overline{T(B(nr))}$, $n \in \mathbb{N}^*$.
On rq que F_n est fermé et que $\bigcup_n F_n = F$ (T est surj)
donc il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tq $\mathring{F}_n \neq \emptyset$ (th de Baire)
et donc $x \in F$ et $\rho > 0$ tq $B(x, \rho) \subset F_n$.
Par suite, $B(0, \rho) \subset F_{2n}$. En effet, si $z \in B(0, \rho)$,
$z = y - x$ avec $y \in B(x, \rho)$ donc il existe 2 suites (x_p) et (y_p) de $B(nr)$ tq $T(x_p) \to x$ et $T(y_p) \to y$
et donc $z = \lim_{n \to \infty} T(y_p - x_p) \in F_{2n}$ ($y_p - x_p \in B(2nr)$).
Finalt, $B(0, \frac{\rho}{2n}) = \frac{1}{2n} B(0, \rho) \subset \frac{1}{2n} F_{2n} = \overline{T(B(r))}$.

2) On note $V_n = B(\frac{r}{2^n})$, $n \in \mathbb{N}$.
$\overline{T(V_1)} \subset T(V_0)$?
Soit $y_1 \in \overline{T(V_1)}$

$\overline{T(V_2)}$ est un vois de 0 (1) donc $\overline{T(V_1)} \subset T(V_1) + \overline{T(V_2)}$
et donc il existe $x_1 \in V_1$ et $y_2 \in \overline{T(V_2)}$ tq $y_1 - y_2 = T(x_1)$.
En itérant le procédé, on construit ainsi (x_n) et (y_n)
tq $\begin{cases} x_n \in V_n \\ y_n \in \overline{T(V_n)} \\ y_n - y_{n+1} = T(x_n) \end{cases}$.

On rq que $\sum_{n=1}^{+\infty} \|x_n\| < +\infty$ $\left(\|x_n\| < \frac{r}{2^n}\right)$ donc $\sum_{n \geq 1} x_n$ cvge
(E est complet) et on note $x = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n$.
Mais $T\left(\sum_{n=1}^{N} x_n\right) = \sum_{n=1}^{N} T(x_n) = \sum_{n=1}^{N} (y_n - y_{n+1}) = y_1 - y_{N+1}$
pour $\forall N \in \mathbb{N}^*$ donc $T(x) = y_1$.