Fcts positivt homogènes de deg 1 [Gou] p 109.

Prop : Soit E un $\mathbb{R}$-ev et $f : E \to \mathbb{R}$ une fct positivt hom de deg 1. Alors,

(i) f est conv ssi $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$ pour tt $x, y \in E$

(ii) Si f est à val ≥ 0, elle est conv dès que $\{x \in E,\ f(x) \leq 1\}$ est conv.

(iii) Si f est à val ≥ 0, paire et conv, c'est une semi-norme.

Dém :

(i) :

CN : $\forall x, y \in E$, $\frac{1}{2} f(x+y) = f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{1}{2}[f(x) + f(y)]$

CS : $\forall x, y \in E$, $\forall \lambda \in [0,1]$,

$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq f(\lambda x) + f((1-\lambda)y) = \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$

(ii) :

D'après (i), il suffit de mq $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$ pour tt $x, y \in E$.

Soit donc $x, y \in E$.

Pour tt $\varepsilon > 0$, $\frac{x}{f(x)+\varepsilon}$ et $\frac{y}{f(y)+\varepsilon}$ st ds $\{x \in E,\ f(x) \leq 1\}$

donc $f\left(\lambda \frac{x}{f(x)+\varepsilon} + (1-\lambda)\frac{y}{f(y)+\varepsilon}\right) \leq 1$ pour tt $\lambda \in [0,1]$

($\{x \in E,\ f(x) \leq 1\}$ est conv).

Ep, $\lambda = \frac{f(x)+\varepsilon}{f(x)+f(y)+2\varepsilon}$ fournit $f\left(\frac{x+y}{f(x)+f(y)+2\varepsilon}\right) \leq 1$

ie $f(x+y) \leq f(x) + f(y) + 2\varepsilon$ pour tt $\varepsilon > 0$

d'où le résultat ($\varepsilon \to 0$).

(iii) :

. f vérifie l'inég triang (i)

. $f(\lambda x) = |\lambda| f(x)$ pour tt $x \in E$ et tt $\lambda \in \mathbb{R}$. En effet,
si $\lambda \geq 0$, $f(\lambda x) = \lambda f(x) = |\lambda| f(x)$ pour tt $x \in \mathbb{R}$
si $\lambda \leq 0$, $f(\lambda x) = f(-\lambda x) = -\lambda f(x) = |\lambda| f(x)$ pour tt $x \in \mathbb{R}$.

Appl : Soit E un $\mathbb{R}$-ev de dim $< \infty$ et Ω un ouvert de E non vide, borné, conv et sym p.r à O.
Alors, il existe une norme N sur E tq $\Omega = B_N(0,1)$.

Dém :
Soit $x \in E \setminus \{0\}$.
On considère $T_x = \{\lambda > 0,\ \lambda x \in \overline{\Omega}\}$. Alors,
. $T_x \neq \emptyset$: Ω est ouvert et contient 0 (Ω est non vide, sym p.r à O et conv) donc Ω contient $B(0,r)$ avec $r > 0$ et donc $\frac{r}{2\|x\|} \in T_x$.
. T_x est majoré : $\overline{\Omega}$ est borné (Ω l'est) ie $\exists M > 0, \forall x \in \overline{\Omega}, \|x\| \leq M$
donc si $\lambda \in T_x$, $\lambda \leq \frac{M}{\|x\|}$.
Donc $\mu_x = \sup T_x$ est bien déf.
N.B : $\mu_x \in T_x$ $\left(T_x = \varphi_x^{-1}(\overline{\Omega}) \text{ avec } \varphi_x : \begin{array}{l}]0,+\infty[\to E \\ \lambda \mapsto \lambda x \end{array} \text{ cont} \right.$
donc T_x est fermé ds $]0,+\infty[$)
On définit alors $N : E \to \mathbb{R}$
$$x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{\mu_x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$
On vérifie que N est positiv hom de deg 1, à val ≥ 0 et paire.
De plus, $N(x) \leq 1 \iff x = 0$ ou $\mu_x \geq 1$
$\iff x \in \overline{\Omega}$.

$\left(\text{si } \mu_x \geq 1,\ x = \left(1 - \frac{1}{\mu_x}\right) 0 + \frac{1}{\mu_x} \mu_x x \in \overline{\Omega} \text{ car } \overline{\Omega} \text{ est conv} \right)$

donc $\{x \in E, N(x) \leq 1\} = \overline{\Omega}$ est conv donc N est conv (ii) et donc N est une semi norme (iii).

Mais $N(x) = 0 \iff x = 0$ donc N est une norme