Th de Müntz [Gou] p 286

Th : Soit $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite strict^t $\nearrow$ d'entiers ≥ 1 tq $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{\alpha_n} = +\infty$.

Alors, $\mathrm{Vect}(x^{\alpha_n}, n\in\mathbb{N}^*)$ est dense ds $C([0,1],\mathbb{R})$ pour $\|.\|_2$

Dém :

On note $E_N = \mathrm{Vect}(x^{\alpha_1},\dots,x^{\alpha_N})$, $N\in\mathbb{N}^*$.

A voir : Soit $m\in\mathbb{N}$.

1) $d(x^m, E_N) = \frac{1}{\sqrt{2m+1}} \prod_{n=1}^{N} \left|\frac{\alpha_n - m}{\alpha_n+m+1}\right|$

2) $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n - m}{\alpha_n+m+1} = 0$

Ccl : $x^m \in \overline{\mathrm{Vect}(x^{\alpha_n}, n\in\mathbb{N}^*)}$ pour tt $m\in\mathbb{N}$ mais $\mathrm{Vect}(x^m, m\in\mathbb{N})$ est dense ds $C([0,1],\mathbb{R})$ pour $\|\ \|_\infty$ (Th de Weierstrass) donc pour $\|.\|_2$ ($\|.\|_2 \leq \|\ \|_\infty$) d'où la densité de $\mathrm{Vect}(x^{\alpha_n}, n\in\mathbb{N}^*)$ ds $C([0,1],\mathbb{R})$ pour $\|.\|_2$.

---

1) $$d(x^m, E_N)^2 = \frac{G(x^{\alpha_1},\dots,x^{\alpha_N},x^m)}{G(x^{\alpha_1},\dots,x^{\alpha_N})}$$

mais
$$G(x^{\alpha_1},\dots,x^{\alpha_N}) = \det\left(\langle x^{\alpha_i}, x^{\alpha_j}\rangle\right)_{1\leq i,j\leq n} = \det\left(\frac{1}{\alpha_i+\alpha_j+1}\right)_{1\leq i,j\leq n} = \frac{\prod_{i<j}(\alpha_i-\alpha_j)^2}{\prod_{i,j}(\alpha_i+\alpha_j+1)} \quad \text{(dét de Cauchy)}$$

et, de m̂,
$$G(x^{\alpha_1},\dots,x^{\alpha_N},x^m) = \frac{\left[\prod_{i<j}(\alpha_i-\alpha_j)^2\right]\left[\prod_i(\alpha_i-m)^2\right]}{\left[2m+1\right]\left[\prod_{i,j}(\alpha_i+\alpha_j+1)\right]\left[\prod_i(\alpha_i+m+1)^2\right]}$$

donc $d(x^m, E_N) = \frac{1}{\sqrt{2m+1}} \prod_{n=1}^{N} \left|\frac{\alpha_n - m}{\alpha_n+m+1}\right|$

2) $\exists N_0 \in \mathbb{N}^*, \forall n \geq N_0, \alpha_n > m \quad (\alpha_n \longrightarrow +\infty)$

donc $\log\left(\prod_{n=N_0}^{N} \frac{\alpha_n - m}{\alpha_n+m+1}\right) = \sum_{n=N_0}^{N} \log\left(\frac{\alpha_n - m}{\alpha_n+m+1}\right)$ pour tt $N \geq N_0$

et donc $\prod_{n=N_0}^{+\infty} \frac{\alpha_n - m}{\alpha_n+m+1} = 0$ dès que $\sum_{n=N_0}^{+\infty} \log\left(\frac{\alpha_n - m}{\alpha_n+m+1}\right) = -\infty$.

Mais $\log\left(\frac{\alpha_n - m}{\alpha_n+m+1}\right) = \log\left(1 - \frac{2m+1}{\alpha_n+m+1}\right) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{2m+1}{\alpha_n}$

donc $\sum_{n=N_0}^{N} \log\left(\frac{\alpha_n - m}{\alpha_n+m+1}\right) \sim -(2m+1) \sum_{n=N_0}^{N} \frac{1}{\alpha_n}$ et

$\sum_{n=N_0}^{+\infty} \log\left(\frac{\alpha_n - m}{\alpha_n+m+1}\right) = -\infty \quad \left(\sum_{n=N_0}^{+\infty} \frac{1}{\alpha_n} = +\infty\right)$

Csq : Soit $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite strict^t ↑ d'entiers avec $\alpha_0 = 0$ tq $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{\alpha_n} = +\infty$.

Alors, $\mathrm{Vect}(x^{\alpha_n}, n\in\mathbb{N})$ est dense ds $C([0,1],\mathbb{R})$ pour $\|\cdot\|_\infty$

Dém :

D'après le th de Weierstrass, il suffit de mq tte fct polyn est ds $\overline{\mathrm{Vect}(x^{\alpha_n}, n\in\mathbb{N})}^{\infty}$.

Soit donc P une fct polyn et $\varepsilon > 0$.

OPS $\alpha_1 \geq 2$ (sinon, on le retire)

Alors, $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{\alpha_n - 1} = +\infty$ donc il existe $g \in \mathrm{Vect}(x^{\alpha_n - 1}, n\in\mathbb{N}^*)$ tq $\|P' - g\|_2 \leq \varepsilon$ (Th de Müntz).

Si maintenant h est la prim de g tq $h(0) = P(0)$, alors $h \in \mathrm{Vect}(x^{\alpha_n}, n\in\mathbb{N})$ et $\|P - h\|_\infty \leq \varepsilon$.

En effet, si $Q = P - h$, $Q(0) = 0$ donc
$Q(x) = \int_0^x Q'(t)\,dt$ pour $\forall x \in [0,1]$ et donc
$|Q(x)| \underset{CS}{\leq} \left(\int_0^x Q'(t)^2\,dt\right)^{1/2} \sqrt{x} \leq \|Q'\|_2 = \|P' - g\|_2 \leq \varepsilon$
pour $\forall x \in [0,1]$ d'où $\|P - h\|_\infty = \|Q\|_\infty \leq \varepsilon$