Egalité de Parseval [Pom] p 252, 242, 221

Th : (i) $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base hilb de $L^2([0,2\pi])$.

(ii) $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2\,dt$ pour $\forall f \in L^2([0,2\pi])$

Dém :

(i) :

$(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une famille orthonormale de $L^2([0,2\pi])$
et $\mathrm{Vect}(e_n, n\in\mathbb{Z})$ est dense ds $C_{2\pi}$ pour $\|.\|_\infty$
(Féjer ou Stone.Weierstrass) donc pour $\|.\|_2$ ($\|.\|_2 \leq \|.\|_\infty$).
Mais $C_{2\pi}$ est dense ds $L^2([0,2\pi])$ donc $\mathrm{Vect}(e_n, n\in\mathbb{Z})$
est dense ds $L^2([0,2\pi])$.

(ii) :

Soit $f \in L^2([0,2\pi])$.
On note $E_N = \mathrm{Vect}(e_{-N},\dots,1,\dots,e_N)$, $N\in\mathbb{N}^*$.

A voir : $\sum_{n=-N}^{N} c_n(f)e_n \xrightarrow{L^2} f$

Ccl : $\left\|\sum_{n=-N}^{N} c_n(f)e_n\right\|_2^2 \longrightarrow \|f\|_2^2$

ie $\sum_{n=-N}^{N} |c_n(f)|^2 \longrightarrow \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(t)|^2\,dt$

Soit $\varepsilon > 0$.
$\exists g \in \mathrm{Vect}(e_n, n\in\mathbb{Z})$, $\|f-g\|_2 < \varepsilon$.
Plus précist, $g \in E_p$ avec $p\in\mathbb{N}^*$.
En fait, $g\in E_N$ pour $\forall N \geq p$ donc
$\left\|f - \sum_{n=-N}^{N} \langle f,e_n\rangle e_n\right\|_2 \leq \|f-g\|_2 < \varepsilon$ pour $\forall N\geq p$
($\sum_{n=-N}^{N}\langle f,e_n\rangle e_n$ est la proj orthog de f sur E_N)

mais $\langle f, e_n \rangle = c_n(f)$ donc $\sum_{n=-N}^{N} c_n(f) e_n \xrightarrow{L^2} f$.

Csq : Soit f DSE au vois de a : $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-a)^n$, $z \in D(a,R)$.
Alors, $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(a+re^{it})|^2 dt$ pour $\forall r \in]0,R[$.

Dém :

Soit $r \in]0,R[$.

$\sum_{n\geq 0} a_n (z-a)^n$ CN sur $C(a,r)$ donc $\sum_{n\geq 0} a_n r^n e^{int}$ CN sur $[0,2\pi]$
($z = a + re^{it}$, $t \in [0,2\pi]$) et donc $\sum_{n\geq 0} a_n r^n e^{int}$ est la
série de Fourier de $t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n e^{int} = f(a+re^{it})$ d'où
$\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(a+re^{it})|^2 dt$ (Eg de Parseval)

Appl : Th de Liouville

Une fct entière et bornée est cste.

Dém :

Soit f entière : $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$, $z \in \mathbb{C}$
bornée par $M > 0$

A voir : $|a_n| \leq \frac{M}{r^n}$ pour $\forall r > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$

Ccl : $|a_n| = 0$ pour $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $(r \to +\infty)$ donc $f = a_0$

Soit $r > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$.
Alors, $|a_n|^2 r^{2n} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^2 dt \leq M^2$
donc $|a_n| \leq \frac{M}{r^n}$.